Escuela Normal Superior y Superior de Comercio N°46

“Domingo Guzmán Silva”

Cuadernillo de MATEMÁTICA

5to año

Ciclo lectivo: 2024

Organización del cuadernillo

	Temas	Pagina
Unidad 1	Ubicación de puntos en el plano. Interpretación de gráficos ………………………….….	2
	Función: concepto, elementos ………………………………………………………………..	8
Unidad 2	Función Afin: definición, gráfica. Rectas Paralelas y perpendiculares ………………..	14
	Sistemas de Ecuaciones lineales: resolución gráfica y analítica (métodos de igualación, sustitución y reducción) Problemas ….………………………………………	23
Unidad 3	Función Cuadrática: definición, característica, elementos, gráfica. Forma polinómica, factorizada y canónica …………………………………………………….………..	26
Unidad 4	Módulo. Ecuaciones e inecuaciones: definiciones, propiedades ……………….………..	32
Unidad 5	Trigonometría: Teorema de Pitágoras. Razones trigonométricas. Teorema del Seno y del Coseno. Ecuaciones e identidades trigonométricas. Problemas …….	40

Acuerdo Pedagógico

Pautas de trabajo y convivencia:

- Queda prohibido el uso del celular en el aula, excepto que la/el docente lo autorice para trabajar en clases.
- Es necesario contar con calculadoras científicas como herramienta de aprendizaje y trabajo propio de la materia.
- Los estudiantes deben asistir a clases con los elementos necesarios para su desarrollo: carpeta, lapicera, lápiz, regla, goma y cuando sea necesario elementos de geometría.
- Los alumnos cuentan con un cuadernillo de trabajo que deberán tener en cada clase de matemática en **formato papel.**
- Es importante el respeto hacia cada integrante de la institución (compañeros, docentes, personal no docente, preceptores y directivos).

Para acreditar la materia:

- Asistencia a clases
- Participación en clases
- Carpeta y cuadernillo completos
- Aprobar las evaluaciones orales, escritas, grupales y/o individuales.
- Se informará con la suficiente antelación las fechas que serán evaluados/as.
- Se tomará un trabajo integrador a fin de año.

……………………………………… ……………………………………………………

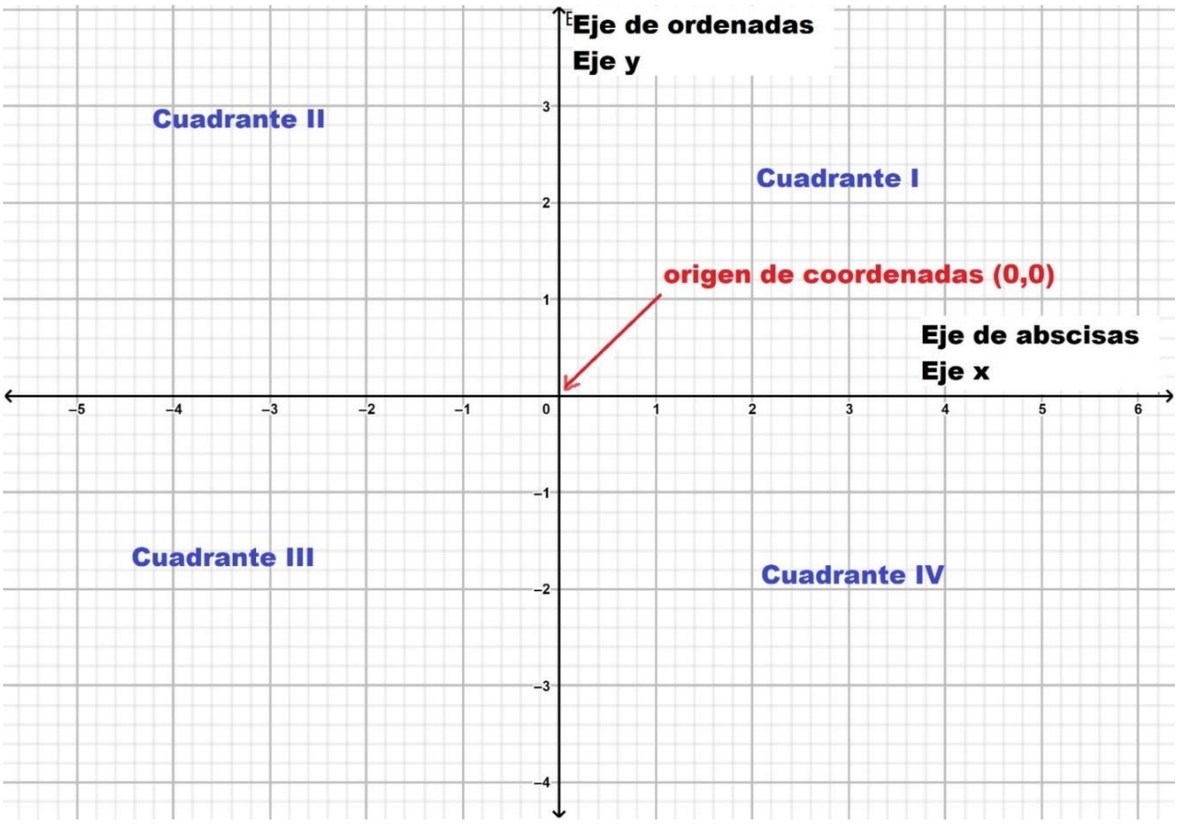
Firma estudiante Firma padre/madre/tutor

Unidad 1: Ubicación de puntos en el plano. Interpretación de gráficos.

Antes de empezar a interpretar los gráficos tendremos que ver cómo se ubican los puntos en el plano, para lo cual tenemos que ver algunos nuevos términos y cuestiones a tener en cuenta.

UBICACIÓN DE PUNTOS EN EL PLANO

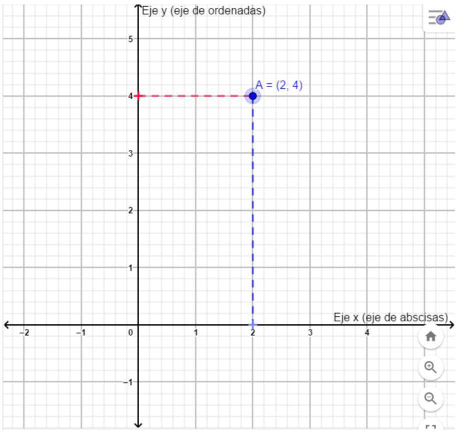
Primero tengamos en cuenta que para representar punto en el plano vamos a considerar dos ejes ortogonales (perpendiculares). Ya saben cómo ubicar los números en la recta real, ahora a esa recta le agregamos otra recta perpendicular que la cruza por el punto 0. Ahora vemos en el gráfico que la recta real es la recta horizontal que la denominaremos "**eje x**" ó "**eje de abscisas**", la recta perpendicular al eje x que trazamos por el 0 la denominaremos "**eje y**" ó "**eje de ordenadas**". La intersección de ambas rectas, de ambos ejes, es en el punto **(0,0)** al cual llamaremos **origen de coordenadas**:



Para ubicar un punto en el plano es necesario usar dos referencias, cada una se llama **coordenada**.
La primera coordenada suele marcarse en el eje horizontal y se la denomina **coordenada x** ó **abscisas**. La otra coordenada es la **coordenada y** u **ordenada** y se marca en el eje vertical. La ubicación del par (a;b) está determinada por la intersección entre la ubicación a en el eje x y la ubicación b en el eje y.

Por ejemplo, si queremos marcar el punto **A=(2;4)**

- nos fijamos sobre el eje x el valor 2, ahí marcamos la línea de puntos perpendicular al eje que pasa por 2 (azul), y luego
- sobre el eje y nos ubicamos sobre el valor 4, trazamos la línea de puntos perpendicular al eje que pasa por 4 (roja),
- por último, la intersección de esas líneas punteadas determinan el punto A!!

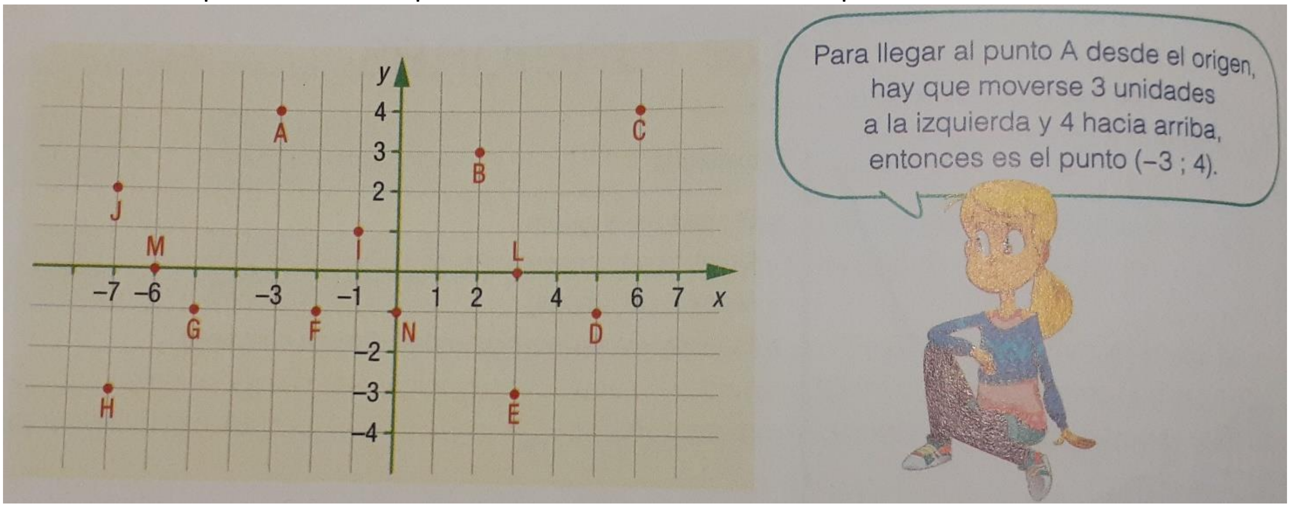


Por si aún no están claras lo del plano cartesiano y cómo se ubican los puntos, te sugiero que veas el video del Profesor Carreón: https://www.youtube.com/watch?v=kzOzYY-T-50 ó los videos del Profe Alex:

- https://www.youtube.com/watch?v=ftGVWXo1Khc (partes del plano cartesiano: abscisas, ordenadas, origen de coordenadas, cuadrantes, ubicación de puntos)
- www.youtube.com/watch?v=QTrE4x5DPZ8 (ubicación de puntos en el plano)
- www.youtube.com/watch?v=M-KzreZqXO0 (ubicación de puntos en el plano con fracciones)

Vamos a ponernos a prueba con las siguientes actividades!

Actividad 1: Lean lo que dice la chica para indicar las coordenadas del punto A



Ahora escriban los datos de los otros puntos en la siguiente tabla:

Punto	Abscisa	Ordenada	Coordenadas del punto	Cuadrante
A	-3	4	(-3;4)	II
B				
C				
D				
E				
F				
G				
H				
I				
J				
L				
M				
N				

Actividad 2: Ubiquen los siguientes puntos en un sistema de ejes coordenados.

A=(-1;2) B=(4;-3) C=(0;1) D=(-3;0) E=(0;0) F=(-3;-5) G=(-2;4)

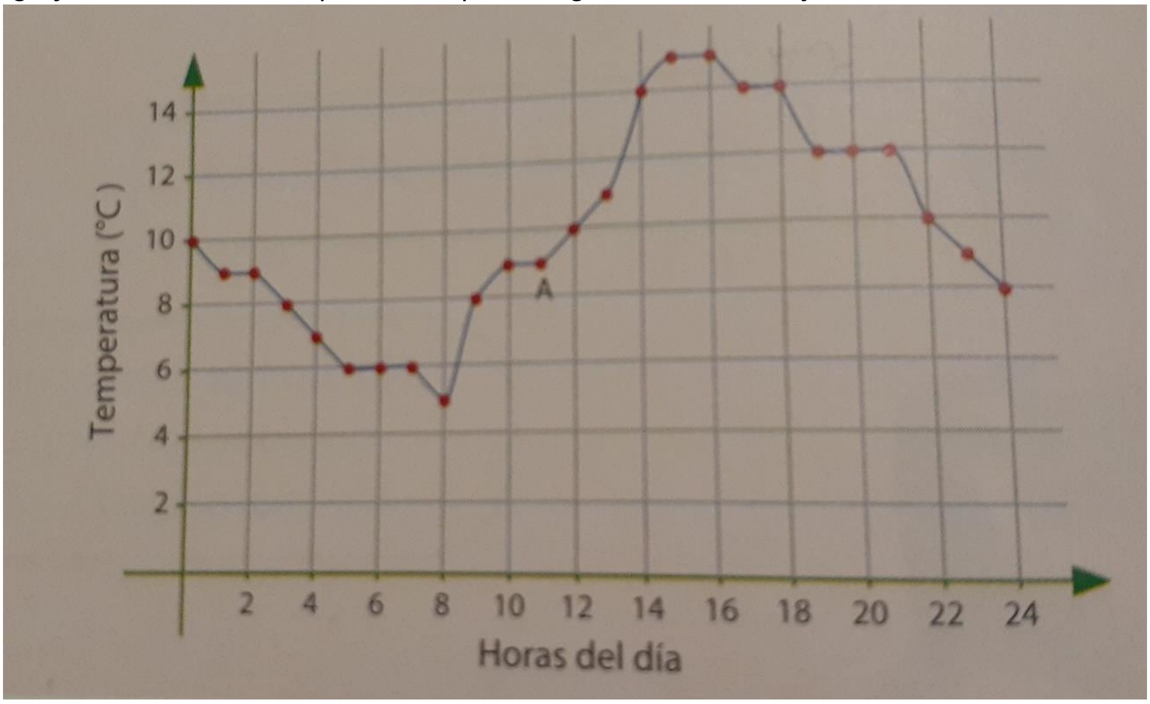
LECTURA DE GRÁFICOS

Para poder analizar qué quieren decir los puntos en un gráfico, deben observar qué se está representando en cada eje. Por ejemplo si en el eje horizontal se están graficando las horas del día y en el vertical la temperatura en grados centígrados, un punto (2,9) indica que a las 2 de la mañana hacía 9°C

Veamos dos ejemplos para analizar algunas cuestiones

Ejemplo 1:

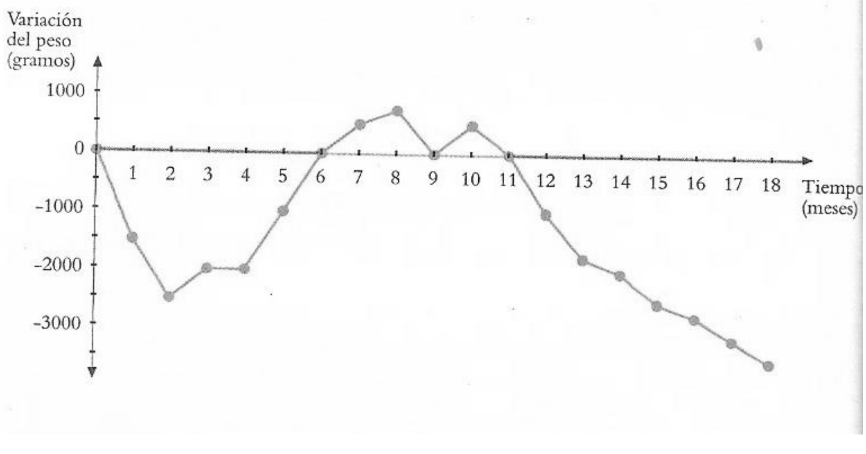
El siguiente gráfico muestra las temperaturas que se registraron el 21 de junio de 2017



- ¿Qué información brinda el punto A de la gráfica? *El punto A indica que a las 11 hs se registraron 9°C*
- ¿Cuál fue la temperatura mínima de ese día? ¿A qué hora se produjo? *La temperatura mínima fue de 5°C y se produjo a las 8 hs*
- ¿A qué hora se registró la temperatura máxima? *No hubo una sola temperatura máxima ya que a las 15 hs y a las 16 hs se registraron 15°C*
- ¿En qué horarios la temperatura se mantuvo constante? *Desde la 1 hasta las 2 de la mañana, desde las 5 hs hasta las 7 hs inclusive, desde las 10 hs hasta las 11 hs, desde las 15 hs hasta las 16 hs, desde las 17 hs hasta las 18 hs y desde las 19 hs hasta las 21 hs.*
- ¿Qué temperatura hacía a las 6 de la tarde? *14°C*
- ¿En qué horas la temperatura fue de 14°C? *A las 14 hs, 17 hs y 18 hs*
- ¿En qué horas la temperatura superó los 12°C? *Los 12°C se superaros desde las 13:30 hs hasta casi las 19 hs.*
- ¿En qué horas la temperatura fue bajando? *Desde las 0 hasta la 1, desde las 2 hasta las 5, desde las 7 hasta las 8, desde las 16 hasta las 17, desde las 18 hasta las 19 y desde las 21 hasta las 24 hs.*

Ejemplo 2:

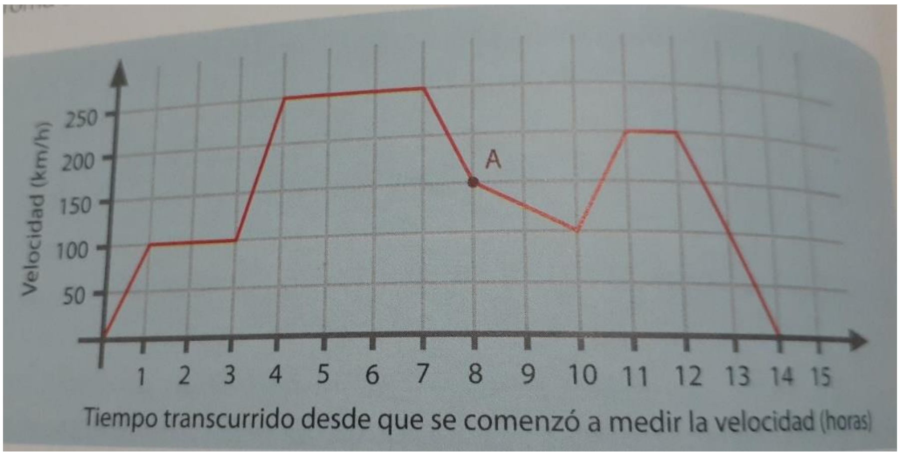
Una doctora nutricionista registra una vez al mes, en un gráfico cartesiano, la variación del peso en gramos de sus pacientes en función del tiempo.
El siguiente gráfico corresponde a la señora Juana, quien comenzó la dieta con 98kg y realiza su consulta con la doctora una vez por mes.



a) ¿Cuánto pesaba en la tercera consulta? *En la tercer consulta llevaba bajado 2000 grs=2 kg así que pesaba 96 kg.*
b) ¿Cuánto aumentó entre el cuarto y quinto mes? *Sólo aumentó 1 kg*
c) ¿En qué mes esta paciente alcanzó su menor peso? ¿Y el mayor? *El menor peso lo alcanzó a los 18 meses de haber empezado con la nutricionista, mientras que el mayor peso lo registró a los 8 meses de haber empezado*
d) ¿En qué períodos bajó de peso? *Desde que empezo hasta e 2do mes, entre el 8vo y 9no mes y desde el décimo mes hasta el mes 18.*
e) ¿En qué períodos subió de peso? *Entre el 2do y 3er mes, desde el 5to al 8vo mes, y entre el 9no y 10mo mes*
f) ¿Hubo algún momento en el que su peso no varió? *Entre el 3er y 4to mes su peso no varió*
g) ¿En qué meses la paciente volvió a pesar lo mismo que al comenzar el tratamiento? Pesó 98 kg en el 6to mes, en el 9no y en el decimoprimer mes.

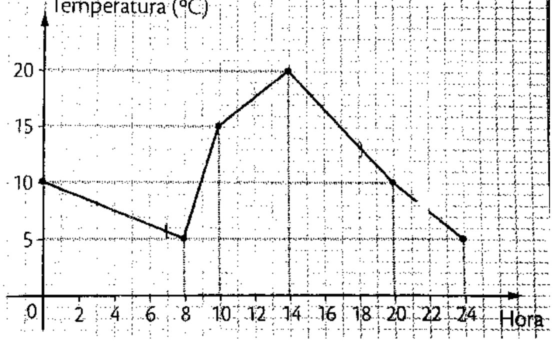
Ahora es tu turno de interpretar los gráficos así que te dejo varias actividades para pensar!!

Actividad 3: Un ingeniero analiza la variación de la velocidad de un auto en un tiempo determinado. Toma ciertas medidas y arma este gráfico:



a) ¿Qué está representando en cada eje? ¿en qué unidades mide?
b) ¿Qué información da el punto A?
c) A las 5 hs de comenzar las mediciones, ¿cuál era la velocidad? ¿Cómo te das cuenta?
d) ¿En qué momento la velocidad fue de 200 km/h? ¿Cómo te das cuenta?
e) ¿En qué momentos la velocidad se mantiene constante? ¿Cómo te das cuenta?
f) ¿Cuál es la escala en el eje de las ordenadas? ¿Cuánto representa cada cuadradito?
g) ¿En qué momentos la velocidad fue de 0km/h? ¿Dónde te fijas?
h) ¿En qué momentos la velocidad aumenta?

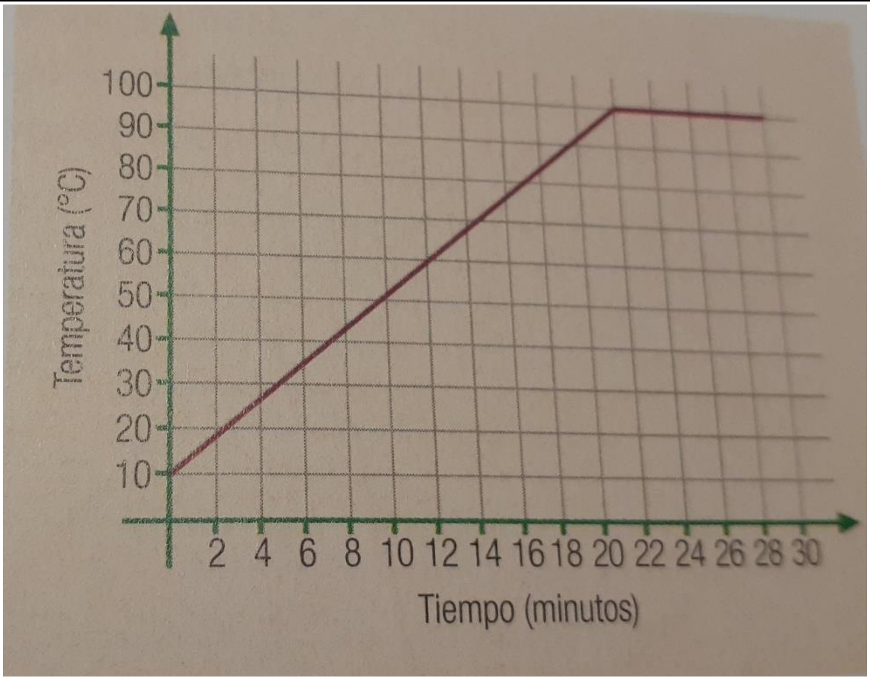
Actividad 4: El siguiente gráfico muestra las distintas temperaturas que se registraron en Buenos Aires durante un día del año.



a) ¿Qué significa el punto (10;15)?
b) Escribe los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) ¿La temperatura fue de 0°C en algún momento? ¿Por qué?
d) ¿Posee punto máximo? ¿Cuál? ¿en qué hora del día se registró?
e) Mencionar los intervalos de tiempo en los cuales la temperatura fue mayor a 12°C

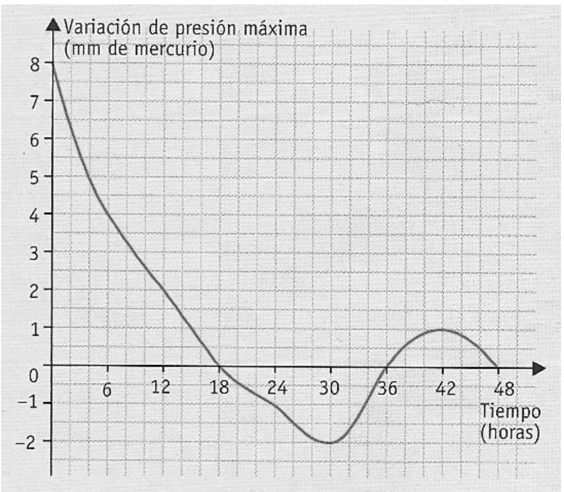
Actividad 5: En un recipiente se coloca un poco de agua y se la pone a calentar durante 30 minutos. El gráfico muestra la temperatura del agua en función del tiempo desde que se pone el recipiente al fuego.

a) ¿Cuál es la temperatura del agua cuando se la pone al fuego?
b) ¿Cuál es la temperatura del agua a los 10 minutos de poner el agua al fuego?
c) ¿En qué momento la temperatura era de 90°C? ¿Cómo te das cuenta?
d) El agua hierve a los 100°C ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que hierve el agua? ¿qué ocurre a partir de ese momento?



Actividad 6: Un paciente entra en una sala de urgencias de un hospital para ser atendido por el aumento de su presión arterial. Durante un cierto tiempo se lo conecta a una máquina que le controla la presión continuamente y produce un gráfico. En él aparece representada <u>la variación de la presión máxima</u> del paciente, <u>respecto de la considerada normal</u> (12 mm de mercurio), a partir del momento de su internación.

a) ¿Con qué presión máxima ingresó el paciente al hospital?
b) ¿Qué representan en este gráfico los valores negativos que figuran en el eje vertical?
c) ¿Tuvo presión máxima normal en algún momento durante su internación?
d) De acuerdo a lo que se observa en el gráfico, ¿durante cuánto tiempo estuvo este paciente en observación?

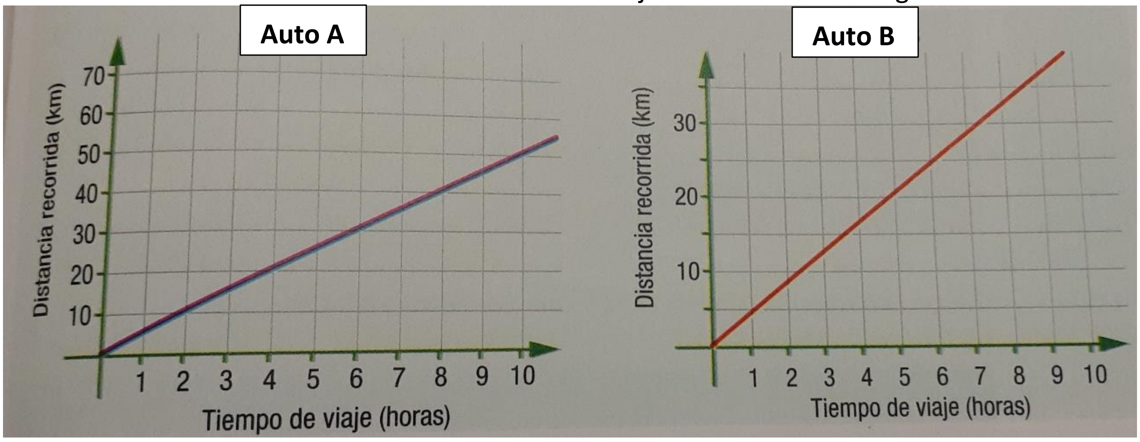


Actividad 7: La temperatura media registrada en el mes de agosto de 2017 en la ciudad de Magdalena fue de 6°C. Este gráfico muestra la variación respecto de esa temperatura durante el 6 de agosto de 2017

a) ¿Qué información da el punto A del gráfico?
b) ¿Cuál fue la temperatura a las 0 hs? ¿Y a las 10 hs?
c) ¿A qué hora la temperatura era de 6°C? ¿Y de 7°C? ¿y de 5°C? ¿Dónde observan estos datos en el gráfico? Explica con tus palabras.
d) ¿Cuáles fueron, ese día, la temperatura máxima y mínima? ¿En qué momento se registraron?
e) ¿En qué momentos del día la temperatura fue mayor a 4°C?
f) ¿En qué periodo del día subió la temperatura? ¿En qué períodos bajó? ¿en qué períodos se mantuvo constante?
g) ¿En qué período del día hubo temperaturas por debajo de 0°C?
h) Completar la tabla con las temperaturas que se registraron el 6 de agosto

Hora	**0**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**	**22**	**24**
Temperatura (°C)													

Actividad 8: Dos autos se dirigen de Buenos Aires a Mar del Plata por la misma ruta recta. Para analizar a qué distancia de Buenos Aires se encuentra cada auto en todo momento del viaje se realizaron estos gráficos



a) Completar la tabla

Tiempo de viaje	2	4	5	9
Distancia recorrida por el auto A en km				
Distancia recorrida por el auto B en km				

b) A partir de los gráficos, ¿podés decidir qué auto va más rápido? ¿Por qué?
c) A partir de la tabla, ¿podés decidir qué auto va más rápido? ¿Por qué?

Actividad 9: En una dietética venden harina integral a $52,50 el kilogramo
a) Completar la tabla

Cantidad de harina (kg)	**1**	**2**	**4**	**8**	**10**	**12**	**15**	**20**
Precio a Pagar (S)								

b) Representar los puntos de la tabla en un sistema de ejes cartesianos
c) ¿Tiene sentido unir los puntos graficados? Explicá cómo lo pensaste
d) Escribí la cuenta que pueden hacer para calcular el precio que hay que pagar si concoes la cantidad de kilogramos que se compran
e) ¿Cuántos kilogramos de harina pueden comprar con $1155? ¿y con $624,75? ¿Por qué?

Actividad 10: En un laboratorio ponen a calentar un líquido que hierve a los 120°C. La fórmula que permite calcular la temperatura del líquido hasta que hierva es $T(h) = 5h + 15$, dónde h son los minutos desde que empezó la medición
a) Completar la tabla

Tiempo (minutos)	**0**	**2**	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**
Temperatura (°C)								

b) Marcar los puntos en un sistema de ejes cartesianos
c) ¿Cómo expresarías, con tus palabras, la forma de calcular la temperatura del líquido en cualquier momento?

Actividad 11: Juan sale de su casa en auto a las 8 de la mañana a una velocidad de 60 km/h.
a) Completar la tabla

Tiempo de viaje (horas)	**2**	**3**	**5**	**6**	**10**
Distancia recorrida (km)					

b) Escribir la cuenta que hay que hacer para calcular la distancia recorrida si conocen las horas de viaje
c) Escribir la cuenta que hay que hacer para calcular las horas de viaje si conocen la distancia recorrida
d) Marcar los puntos en un sistema de ejes cartesianos
e) ¿Tiene sentido unir los puntos? ¿Por qué?

Concepto de Función

Teoría

Una relación entre dos conjuntos numéricos A y B es un conjunto de pares ordenados (x; y), con la condición de que $x \in A \wedge y \in B$.

Ejemplo: $R: A \to B \wedge A = \{0; 1; 2\} \wedge B = \{3; 4; 5; 6\}$

a) $R_1 = \{(0;3), (0;4), (1;5), (2;6)\}$ b) $R_2 = \{(1;3), (2;5)\}$ c) $R_3 = \{(0;5), (1;6), (2;3)\}$

Una relación es una función cuando se cumplen dos condiciones:

1) Todos los elementos del conjunto A están relacionados con algún elemento del conjunto B (existencia).
2) Cada elemento del conjunto A se relaciona con un único elemento del conjunto B (unicidad).

Del ejemplo anterior:
En R_1, el 0 se relaciona con 2 elementos del conjunto B, el 3 y el 4 (no cumplen con la condición de unicidad).
En R_2, el 0 no está relacionado con ningún elemento del conjunto B (no cumple con la condición de existencia).
En R_3, todos los elementos de A se relacionan con un único elemento de B, por lo tanto, es función.

$f: A \to B \wedge f = \{(0;5), (1;6), (2;3)\}$

$$f(x) = y \begin{cases} f(0) = 5 \to 5 \text{ es la "imagen" de } 0 \text{ y } 0 \text{ es la "preimagen" de } 5 \\ f(1) = 6 \to 6 \text{ es la "imagen" de } 1 \text{ y } 1 \text{ es la "preimagen" de } 6 \\ f(2) = 3 \to 3 \text{ es la "imagen" de } 2 \text{ y } 2 \text{ es la "preimagen" de } 3 \end{cases}$$

1 Se define $R: A \to B \wedge A = \{2;4;7;8\} \wedge B = \{1;3;5;7;9\}$

Indicar si las siguientes relaciones son o no funciones y justificar la respuesta.

a)

x	y
2	1
4	1
7	1
8	1

b)

x	y
7	1
7	3
7	5
7	9

c)

x	y
2	3
8	1
4	5

d)

x	y
8	1
7	5
4	9
2	3

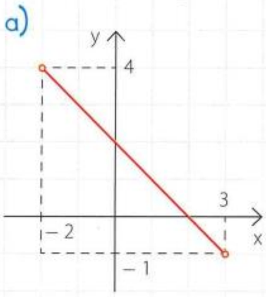
e)

x	y
8	5
4	3
7	1
2	9
8	7

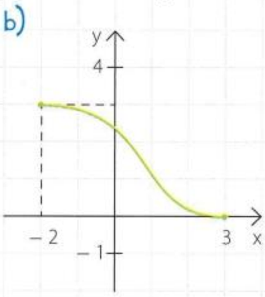
2 Se define $R: A \to B \wedge A = [-2;3] \wedge B = [-1;4]$

Indicar si los siguientes gráficos corresponden o no a funciones y justificar la respuesta.

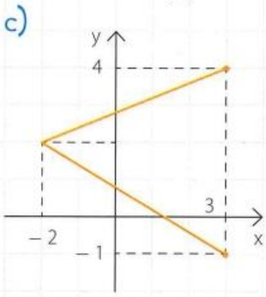
a)



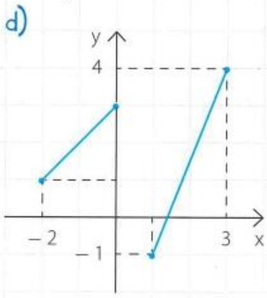
b)



c)



d)



3 Observar el gráfico de la función y responder.

a) ¿Cuál es la imagen de 3?

b) ¿Y cuál la de – 3?

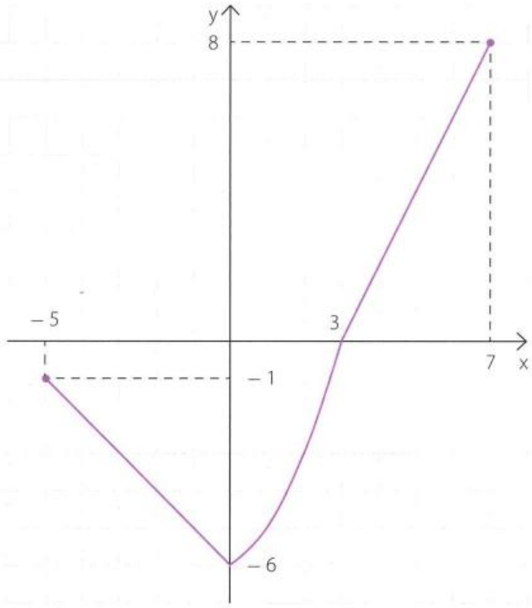
c) ¿Cuál es la preimagen de 2?

d) ¿Y cuál la de 4?

e) ¿En qué valor de x la función vale 0?

f) ¿En qué valor de y el valor de x es 0?

g) Escribir dos valores de x con la misma imagen.



Completar según corresponda.

h) $f(2) = \square$

j) $f(-4) = \square$

i) $f(\square) = 6$

k) $f(\square) = 8$

Dominio e imagen de una función

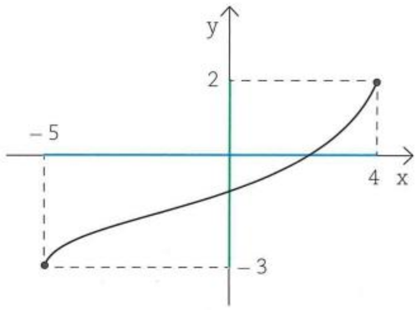
Teoría

En una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, su **dominio** es un conjunto de números reales que pueden ser valores de **x**; y su **imagen**, los que pueden ser valores de **y**.

a) En la función f, el dominio son los valores marcados en azul; y la imagen, los marcados en verde.

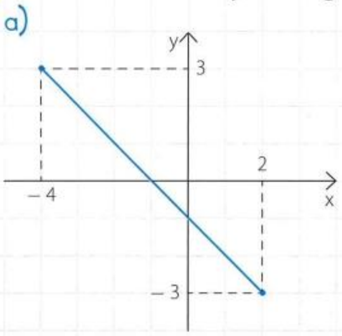
$$f : \underbrace{[-5\,;4]}_{\text{Dominio}} \to \underbrace{[-3\,;2]}_{\text{Imagen}}$$

b) En la función $y = f(x) = \sqrt{x}$, el dominio son los reales positivos; y el cero, al igual que su imagen: $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$.

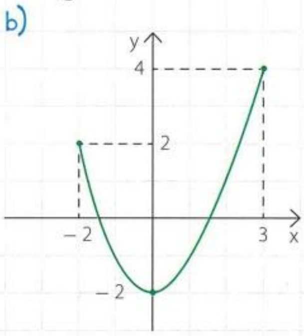


4 Escribir el dominio y la imagen de las siguientes funciones.

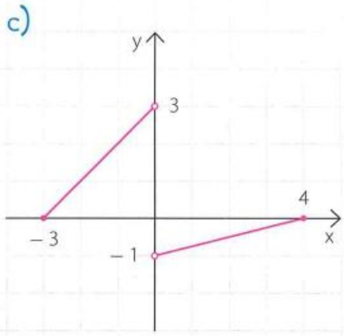
a)



b)



c)



5 Hallar el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 5x - 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

d) $f(x) = \sqrt{x - 3}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

f) $f(x) = \sqrt{1 - x}$

Desafío

6 Decidir si las siguientes relaciones son o no funciones y justificar.

a) $R_1 : N_0 \to N_0 \wedge R_1(x) = x - 1$

b) $R_2 : N \to Q \wedge R_2(x) = \sqrt{x}$

c) $R_3 : N_0 \to Q \wedge R_3(x) = \dfrac{x}{x + 5}$

Conjuntos de ceros o raíces, positividad y negatividad

Teoría

- El **conjunto de ceros** o **raíces** de una función son los valores de x que determinan que $f(x) = 0$.

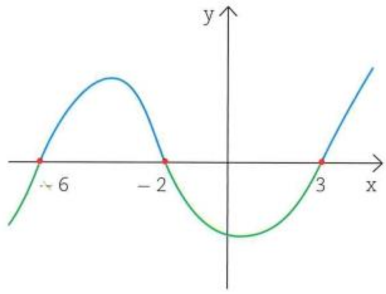
  $f(-6) = 0 \wedge f(-2) = 0 \wedge f(3) = 0 \Rightarrow \mathbf{C^0} = \{-6\,;-2\,;3\}$

- El o los **conjuntos de positividad** son los intervalos reales de los valores de x que determinan que la función sea positiva, o sea, que $f(x) > 0$, (gráfica en azul).

  $\mathbf{C^+} = (-6\,;-2) \cup (3\,;+\infty)$

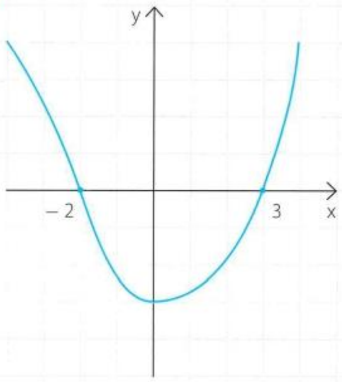
- El o los **conjuntos de negatividad** son los intervalos reales de los valores de x que determinan que la función sea negativa, o sea, que $f(x) < 0$, (gráfica en verde).

  $\mathbf{C^-} = (-\infty\,;-6) \cup (-2\,;3)$



7 Escribir los conjuntos de ceros, positividad y negatividad de las siguientes funciones.

a)

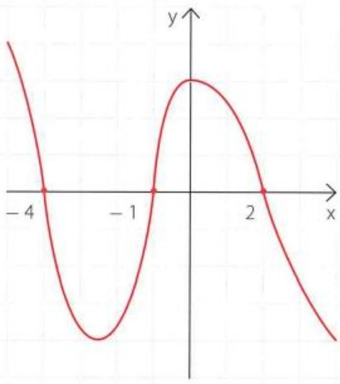


$C^0 =$

$C^+ =$

$C^- =$

b)

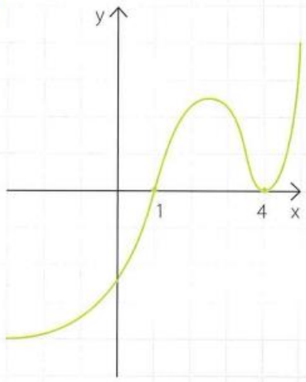


$C^0 =$

$C^+ =$

$C^- =$

c)



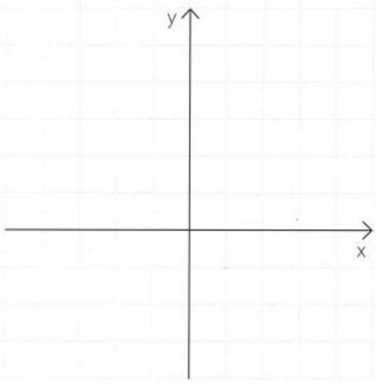
$C^0 =$

$C^+ =$

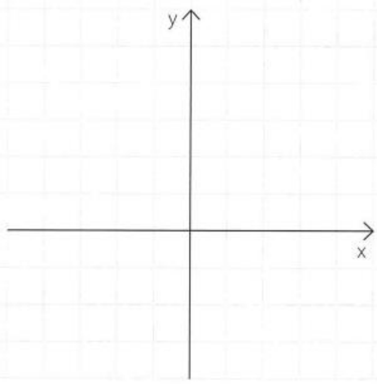
$C^- =$

8 Realizar el gráfico de una función que cumpla con las condiciones pedidas en cada caso.

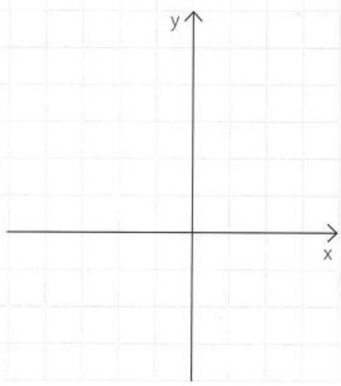
a) $f(1) = 0 \wedge f(-3) = 0 \wedge f(0) > 0$



b) $C^0 = \{-2\,;0\,;3\} \wedge f(-5) < 0 \wedge f(1) < 0$



c) $f(-4) = 0 \wedge f(0) = 0 \wedge C^- = \varnothing$



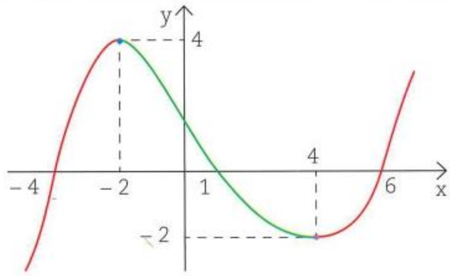
Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Teoría

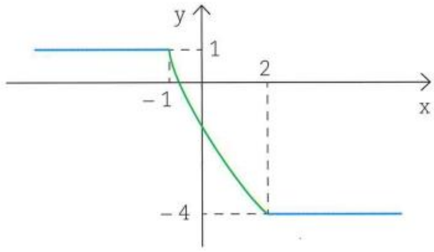
Si a medida que los valores de x aumentan, el valor de la función aumenta, entonces, la función **crece**; pero si disminuyen, entonces, la función **decrece**.
En $\mathbf{x = -2}$ y $\mathbf{x = 4}$, la función no crece ni decrece. Los puntos $(-2\,;4)$ y $(4\,;-2)$ se denominan **máximo** y **mínimo relativo**, respectivamente.

Crecimiento: $(-\infty\,;-2)\cup(4\,;+\infty)$.

Decrecimiento: $(-2\,;\,4)$.



Cuando al aumentar los valores de x, los valores de la función no varían, la función no crece ni decrece, sino que se mantiene **constante**.
$f(-3) = f(-2) = f(-1) = 1$
$f(2) = f(3) = f(4) = -4$
La función es constante en: $(-\infty\,;-1)\cup(2\,;+\infty)$.

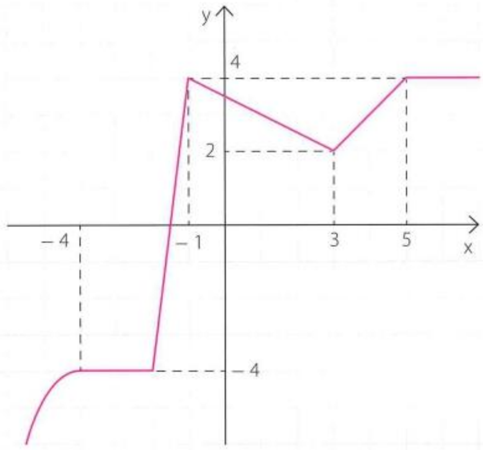


9 Observar el gráfico y escribir.

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

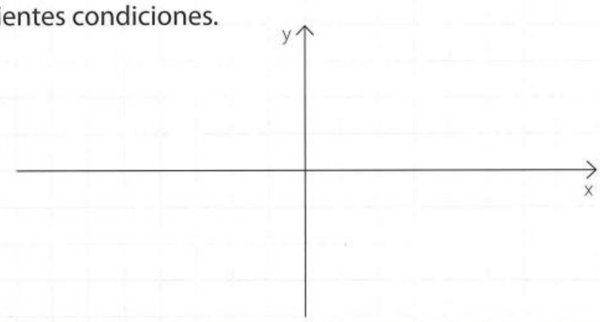
b) El o los intervalos donde es constante.

c) El o los puntos máximos y/o mínimos relativos.



10 Graficar una función que cumpla con las siguientes condiciones.

- Crecimiento: $(-\infty\,;-5)\cup(2\,;+\infty)$
- Es constante: $(-5\,;-2)$
- $f(-7) = f(0) = f(5) = 0$
- Mínimo relativo en $(2\,;-2)$



Desafío

11 Indicar cuáles de las siguientes funciones son crecientes, decrecientes o constantes.

a) $f(x) = x + 3$

b) $f(x) = 2$

c) $f(x) = 1 - x$

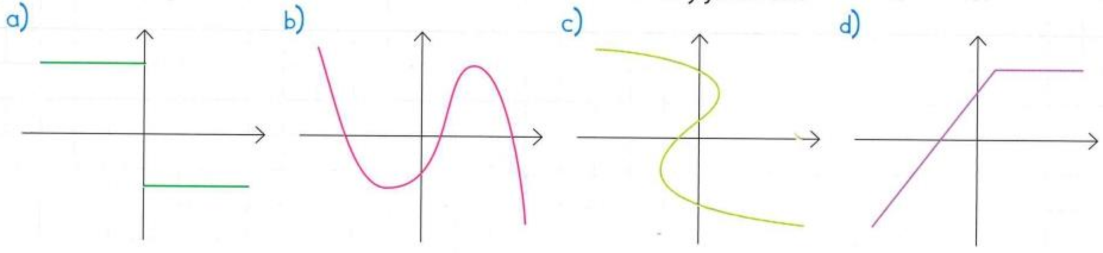
d) $f(x) = \sqrt{x}$

e) $f(x) = x^3$

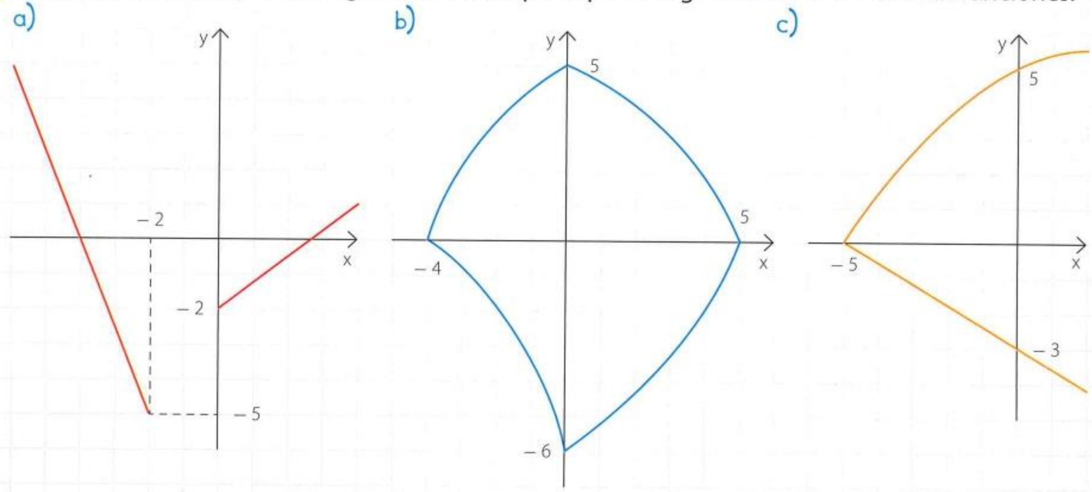
f) $f(x) = -7$

Repaso

12 Indicar si las siguientes relaciones de R: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones y justificar.



13 Escribir un dominio y una imagen adecuados para que las siguientes relaciones sean funciones.



14 Observar el gráfico de la función y responder.

a) ¿Cuál es el dominio y la imagen de la función?

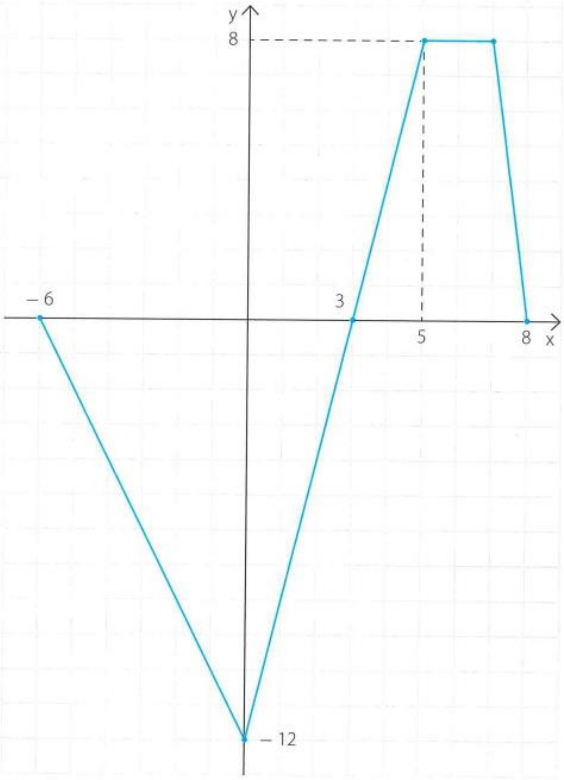
b) ¿Cuáles son las raíces?

c) ¿Cuál es la imagen de – 2?

d) ¿Y cuál la de 0?

e) ¿Cuáles son las preimágenes de – 4?

f) ¿En qué intervalo la función vale 8?



Colocar >, < o = según corresponda.

g) f(2) ☐ f(4)

h) f(6) ☐ f(7)

i) f(– 1) ☐ f(– 2)

j) f(1) ☐ f(5)

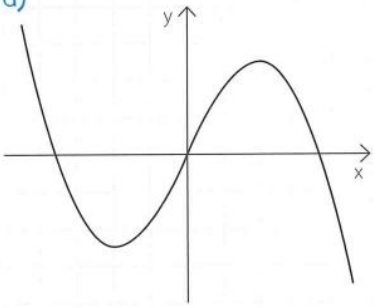
k) f(8) ☐ f(– 6)

l) f(– 3) ☐ f(1)

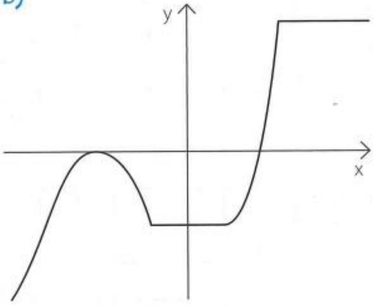
15 Marcar sobre el eje x.

- Con **rojo**: los intervalos de positividad.
- Con **verde**: los intervalos de negatividad.
- Con **azul**: el conjunto de ceros o raíces.

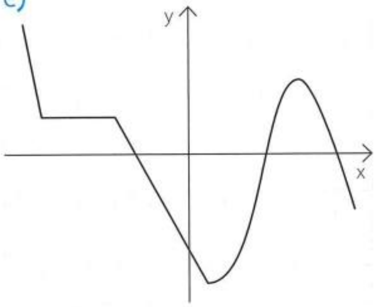
a)



b)

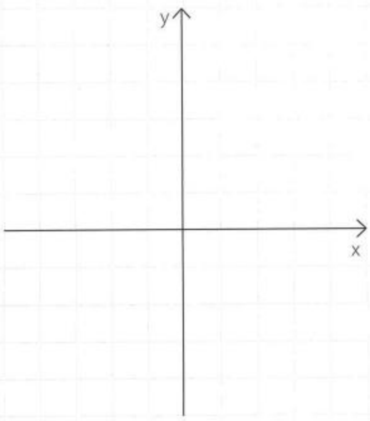


c)

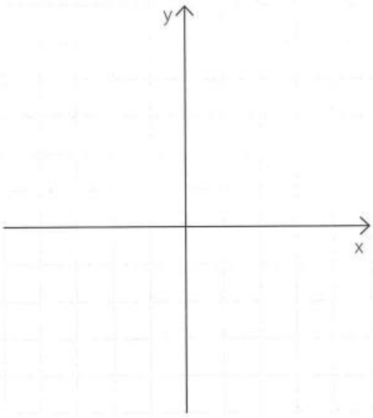


16 Realizar el gráfico de una función que cumpla con las condiciones pedidas en cada caso.

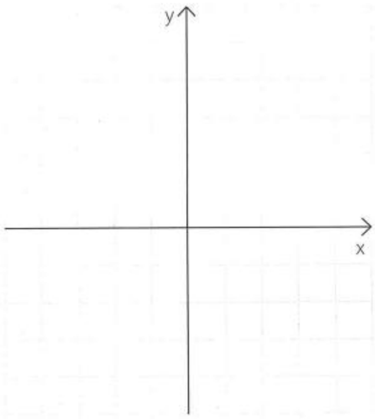
a) Es constante en $(-\infty\,;-1)$; decreciente en $(-1\,;3)$ y tiene un mínimo relativo en $(3\,;-4)$.



b) Es constante en $(-2\,;0)$ y es creciente en $(-\infty\,;-2)\cup(3\,;+\infty)$.



c) Tiene máximos relativos en $(-4\,;1)$ y $(3\,;0)$ y $f(0)=-3$.



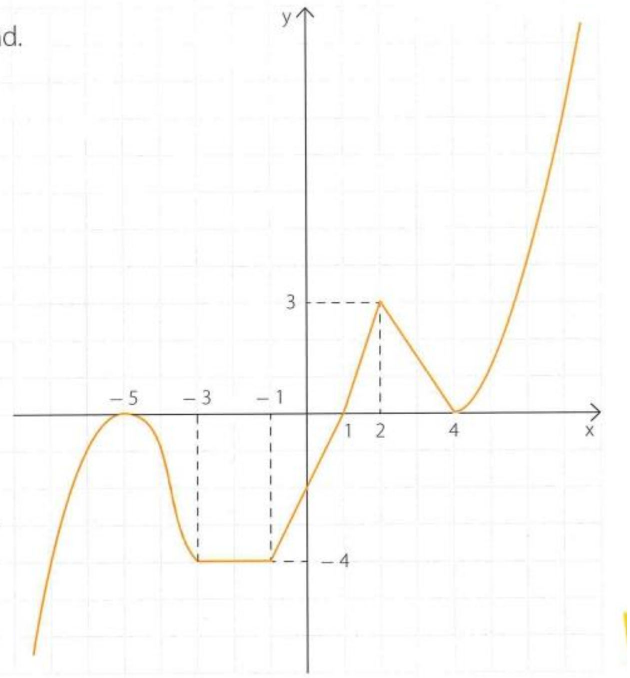
17 Observar el gráfico y escribir.

a) Los conjuntos de ceros, positividad y negatividad.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) El o los intervalos donde es constante.

d) El o los puntos máximos y/o mínimos relativos.



Unidad II: Función Afin. Rectas paralelas y perpendiculares

Teoría

Toda función cuya fórmula es **y = mx + b** se denomina **función lineal** y su gráfica es una recta.

La fórmula $y = \underbrace{m}_{\text{Pendiente}}\ x + \underbrace{b}_{\text{Ordenada al origen}}$ se denomina **ecuación explícita de la recta**.

- La **ordenada al origen** (b) es el valor de donde la recta corta al eje y.

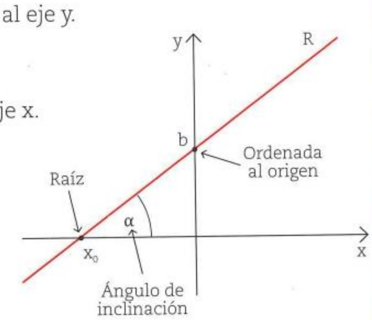
$$f(0) = m \cdot 0 + b \Rightarrow f(0) = b$$

- La **raíz** (x_0) de una función lineal es el valor donde corta al eje x.

$$mx + b = 0 \Rightarrow mx = -b \Rightarrow x_0 = -\frac{b}{m}$$

- La **pendiente** (m) es la inclinación de la recta respecto del eje x y se determina con el ángulo $\hat{\alpha}$.

$$m = \operatorname{tg} \hat{\alpha} \Rightarrow \hat{\alpha} = \operatorname{arc\,tg} m$$



a) $x + y = 2$
$y = -x + 2$
$\begin{cases} m = -1 \\ b = 2 \end{cases}$

b) $3x - y = 1$
$-y = -3x + 1$
$y = 3x - 1$
$\begin{cases} m = 3 \\ b = -1 \end{cases}$

c) $x + 2y = -5$
$2y = -x - 5$
$y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$
$\begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{5}{2} \end{cases}$

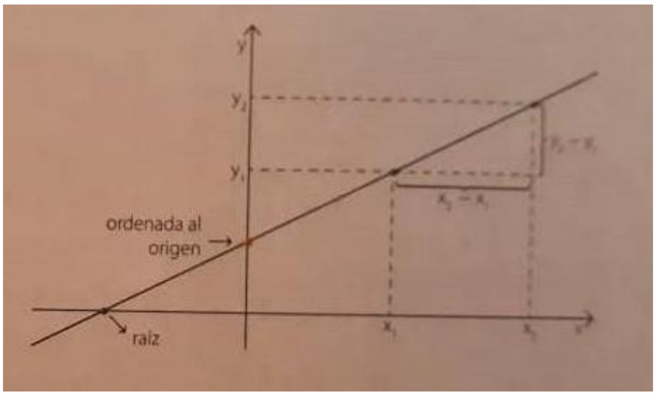
d) $3y - 2x = 7$
$3y = 2x + 7$
$y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$
$\begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ b = -\frac{7}{3} \end{cases}$

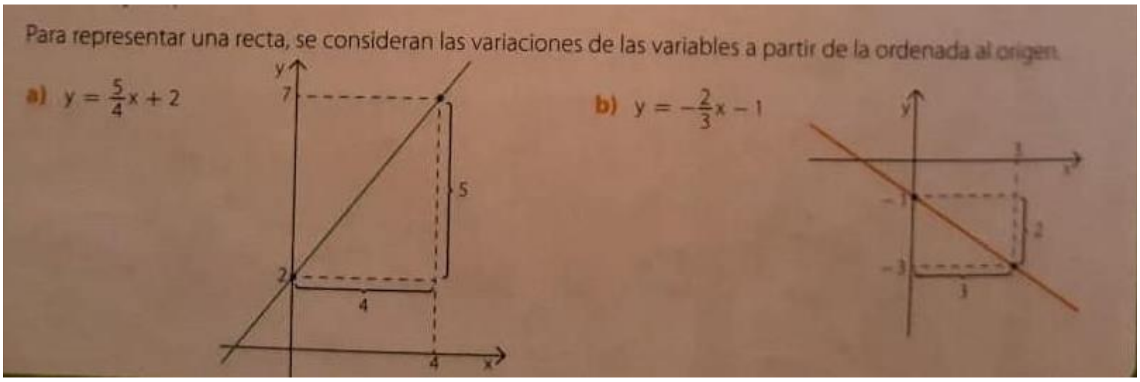
En algunos autores consideran la pendiente con la letra $\boldsymbol{m}$ y en otros con la letra $\boldsymbol{a}$, por esto es lo mismo que nosotros tengamos la expresión $y = mx + b$ o bien $y = ax + b$, lo importante es saber que la pendiente es el número que está multiplicando a la $\boldsymbol{x}$.

Otra manera de hallar la pendiente de la recta es mediante la siguiente fórmula, siendo $(x\_1; y\_1)$ y $(x\_2; y\_2)$ las coordenadas de dos puntos que pertenecen a la función:

$$m = \Delta y/\Delta x = (incremento\ de\ y)/(incremento\ de\ x)$$
$$= (y\_2 - y\_1)/(x\_2 - x\_1)$$

Coloquialmente podemos decir que *la pendiente de la recta es el cociente entre la variación de la variable dependiente y la independiente*.




Para representar una recta, se consideran las variaciones de las variables a partir de la ordenada al origen.

a) $y = \frac{5}{4}x + 2$

b) $y = -\frac{2}{3}x - 1$

OBSERVACIONES A TENER EN CUENTA:

- La gráfica de la función afín es una recta que no necesariamente pasa por el origen de coordenadas
- Posee intersecciones con ambos ejes coordenados
- La pendiente es la inclinación de la recta con respecto al eje x, si es positiva es "creciente" y si es negativa será "decreciente"
- La ordenada al origen es el punto de intersección con el eje y
- Un punto (x,y) pertenece a una función afin si verifica la ecuación de la mencionada función y pertenece a la gráfica si está sobre la recta correspondiente.
- Se denomina ***función lineal***, a una ***función afín*** cuyo término "b" (ordenada al origen o término independiente) sea igual a CERO. $f(x) = y = ax$

Ejercitación

1 Unir cada punto con la recta a la cual pertenece.

a) $(-3;2)$
b) $(-2;4)$
c) $(6;-1)$
d) $(-4;-4)$
e) $(-1;-1)$
f) $(3;-5)$

$y = \frac{3}{2}x + 2$

$y = -2x - 4$

$y = -\frac{4}{3}x - 1$

$y = 5x + 4$

$y = -\frac{1}{2}x + 3$

$y = -3x + 4$

$y = \frac{2}{3}x - 5$

2 Hallar la pendiente de la recta que pasa por cada par de puntos.

a) $(5;7)$ y $(2;1)$ b) $(-2;1)$ y $(6;-7)$ c) $(1;-6)$ y $(-5;2)$

3 Hallar la ordenada al origen, la raíz y el ángulo de inclinación de las siguientes rectas.

a) $y = 3x + 1$ b) $2y = -x + 4$ c) $x - y = 5$ d) $4x + 2y = -6$

4 Hallar la ecuación explícita de las siguientes rectas.

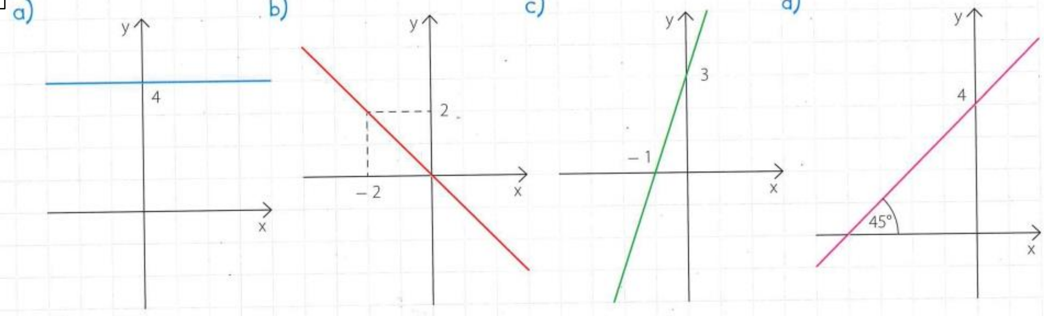


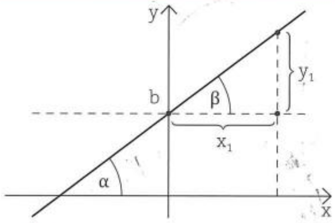
Gráfico de una función lineal

Teoría

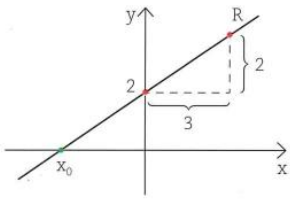
Para graficar una función lineal a partir de su ecuación explícita $y = \mathbf{m}x + \mathbf{b}$, se utiliza la construcción de la figura.

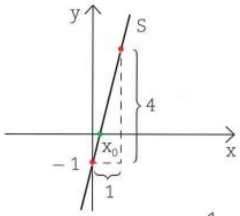
El ángulo de inclinación $\hat{\alpha}$ es igual al ángulo $\hat{\beta}$ por ser correspondientes entre paralelas.

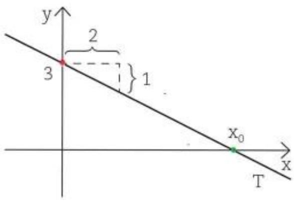
$$m = \operatorname{tg}\hat{\alpha} = \operatorname{tg}\hat{\beta} = \frac{y_1}{x_1}$$



a) $R: y = \frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow m = \frac{2}{3}\begin{matrix}\to y_1\\ \to x_1\end{matrix}$ **b)** $S: y = 4x - 1 \Rightarrow m = \frac{4}{1}\begin{matrix}\to y_1\\ \to x_1\end{matrix}$ **c)** $T: y = -\frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow m = \frac{-1}{2}\begin{matrix}\to y_1\\ \to x_1\end{matrix}$



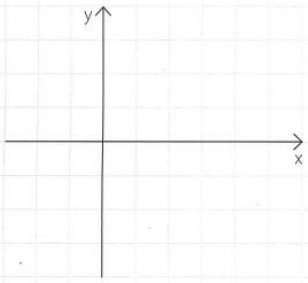


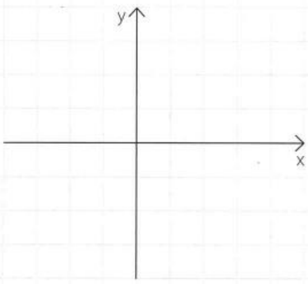


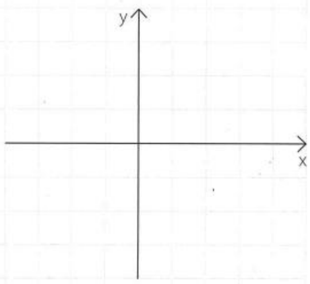
$\frac{2}{3}x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow x_0 = -3$ $4x - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{4}$ $-\frac{1}{2}x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \cdot (-2) \Rightarrow x_0 = 6$

20 Trazar la recta a partir de su ordenada al origen y de su pendiente. Hallar analíticamente la raíz.

a) $y = \frac{2}{5}x - 1$ **b)** $y = -\frac{4}{3}x + 2$ **c)** $y = -2x - 1$

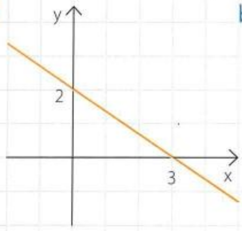




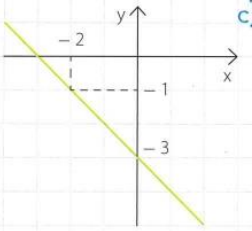


21 Escribir la ecuación explícita de cada una de las siguientes rectas.

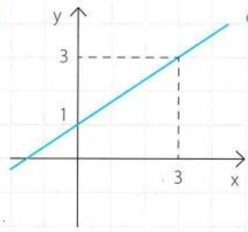
a)



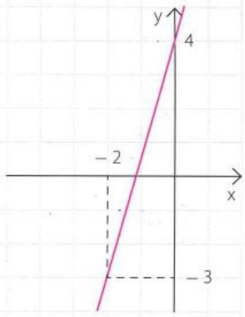
b)



c)



d)



Desafío

22 Hallar la ecuación explícita de la recta que tiene una inclinación de 45° y pasa por el punto (2 ; 5).

Ejercicio: Graficar cada recta a partir de la pendiente y la ordenada al origen

a) $y = 3x - 5$

b) $y = \frac{1}{4}x + 3$

c) $y = -\frac{5}{3}x + 1$

d) $y = 2x - 3$

e) $y = \frac{3}{4}x - 1$

f) $y = -2$

g) $2x + 3y = 4$

h) $y + 5 = 0$

Otra forma de representar la función afín es tener en cuenta **las intersecciones con los ejes coordenados**, teniendo en cuenta lo siguiente

Intersecciones con el eje x $\rightarrow \boldsymbol{y = 0}$
Intersección con el eje y $\rightarrow \boldsymbol{x = 0}$

lean bien el ejemplo que está a continuación:

Ejemplo: Sea $y = -5x + 3$ una función afín,

a) la interseccion con el eje x→ $y = 0$, reemplazando en la ecuación original y despejando la otra variable tenemos

$$0 = -5x + 3$$
$$-3 = -5x$$
$$3/5 = x$$

entonces el punto $(3/5; 0)$ es la intersección con el eje x

b) la intersección con el eje y→ $x = 0$, de la misma manera que antes reemplazamos en la ecuación original y despejamos la otra variable

$$y = -5.0 + 3$$
$$y = 3 \; entonces, el \; punto \; es \; (0; 3)$$

Además de graficar teniendo ya la fórmula puede suceder que tengamos los datos y necesitemos hallar la ecuación de la recta, por lo cual tendremos que calcular la pendiente y/o la ordenada dependiendo de los datos con los que contemos. Para calcular la ecuación de una recta analizaremos tres casos.

CÁLCULO DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA.

1. Caso I

Cálculo de la ecuación de una recta conociendo la pendiente y el punto de intersección con el eje de las ordenadas.

Cuando se conoce el valor de la pendiente de una recta y el valor del punto de intersección con el eje de las ordenadas, basta sustituir esos valores por m y b respectivamente, en la ecuación general de las funciones lineales (y = mx + b), para obtener la ecuación de la recta particular.

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es igual a -8 y cuyo punto de intersección con los ejes de las ordenadas esta dado por 7.

Recuerde que la ecuación de la recta es de la forma y = mx + b; como m = -8 y b = 7, entonces, sustituyendo en la ecuación anterior se tiene: y = -8x + 7.

$y = ax + b$ o bien puede aparecer que $y = mx + b$
(lo importante es saber que el número que multiplica a la x o a la variable independiente es la pendiente -sea a, m o bien otra letra; y el término independiente siempre será la ordenada al origen)

2. Caso II

Cálculo de la ecuación de una recta conociendo la pendiente y uno de sus puntos.

Ejemplo:

Calcular la ecuación de la recta cuya pendiente es igual a 3 y se contiene al punto (2,7).

$a = 3$ por lo cual reemplazando en la forma vista de la ecuación de la recta

$$y = 3x + b$$

Si contiene al punto (2; 7) entonces; x=2 y y=7, reemplazamos

$$7 = 3.2 + b$$
$$7 - 6 = b$$
$$1 = b$$

Así, la ecuación de la recta que pasa por el punto (2;7) y cuya pendiente es 3, es ***y=3x+1***

3. caso III

Cálculo de la ecuación de una recta conociendo dos puntos que pertenecen a ella.

Ejemplo:

Calcular la ecuación de la recta que contiene los puntos (3,5) y (7,13).

1) Calculamos m:

$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$
$$m = \frac{13 - 5}{7 - 3}$$

$m = \frac{8}{4}$

$m = 2$

2) Como en este caso m = 2, y tomando el punto (3,5) calculemos b.

$b = y - mx$

$b = 5 - (2 * 3)$

$b = 5 - 6$

$b = -1$

3) Sustituyendo los de m y b encontrados, en la ecuación general de la recta, se obtiene: y = 2x – 1, que es la ecuación de la recta buscada.

Ejercitación

1) Hallar la ecuación de la recta teniendo en cuenta los siguientes datos:

a) pasa por los puntos (2;1) y (-1;7)

b) tiene pendiente (-3/4) y pasa por el punto (2;-2)

c) pasa por el punto (-1;3) y tiene pendiente 2

d) pasa por los puntos (5;-1) y (-10;-7)

e) tiene pendiente 3 y ordenada al origen -4

f) pasa por los puntos (0;3) y (5/2;0)

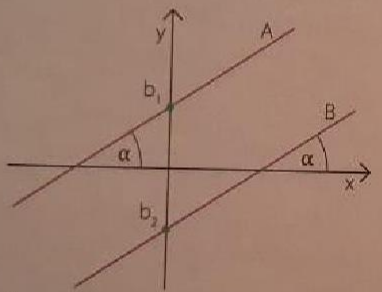
2) Determinar si los puntos (2;1), (3;3) y (-1;-5) están o no alineados, es decir, si pertenecen a la misma función afín

Paralelismo y perpendicularidad

Teoría

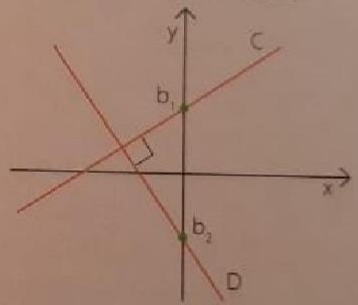
Dos rectas en un plano pueden ser paralelas (//), perpendiculares (⊥) u oblicuas (∠).

Dos rectas son **paralelas** cuando tienen la **misma** pendiente.



$$\begin{cases} A: y_1 = mx + b_1 \\ B: y_2 = mx + b_2 \end{cases} \Rightarrow A \parallel B$$

Dos rectas son **perpendiculares** cuando sus pendientes son **inversas y opuestas**.



$$\begin{cases} C: y_1 = mx + b_1 \\ D: y_2 = -\frac{1}{m}x + b_2 \end{cases} \Rightarrow C \perp D$$

Si dos rectas no son paralelas ni perpendiculares, entonces, son **oblicuas**.

Otra forma de definir las rectas paralelas y perpendiculares serían las siguientes:

Rectas paralelas

Dos rectas son **paralelas** si y solo si sus pendientes son iguales.

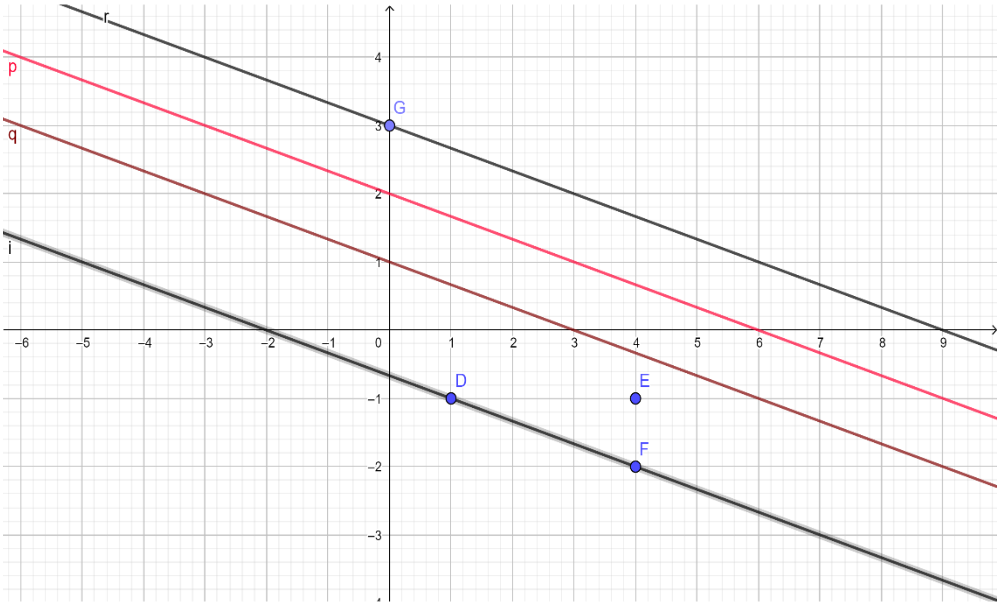
$M: y = a_1x + b_1 \wedge P: y = a_2x + b_2 \wedge M \parallel P \Leftrightarrow a_1 = a_2$

Rectas perpendiculares

Dos rectas son **perpendiculares** si y solo si sus pendientes son inversas y opuestas.

$S: y = a_1 x + b_1 \wedge N: y = a_2 x + b_2 \wedge S \perp N \Leftrightarrow a_1 = -\frac{1}{a_2}$

Para hacer gráficos, como el que se muestra a continuación, pueden explorar el software GEOGEBRA (libre y gratuito que puede usarse online o descargarse a distintos dispositivos: www.geogebra.org)

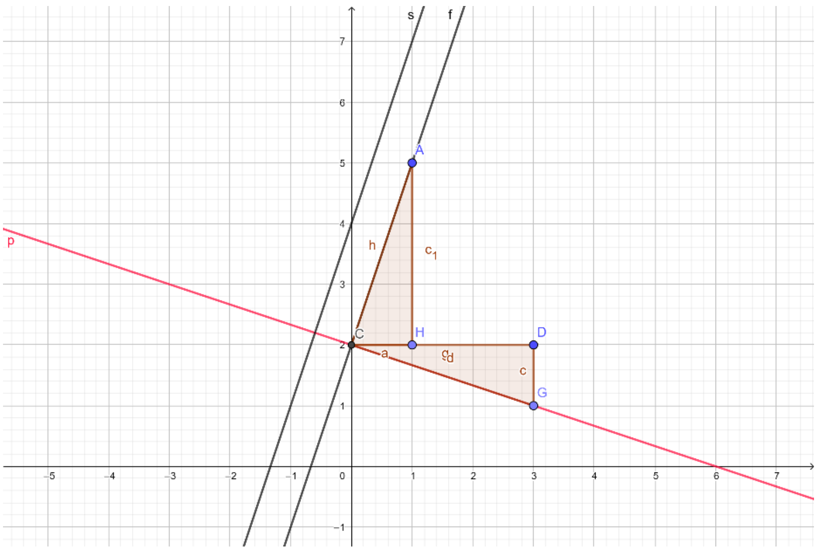


Recta **p**: $y = -1/3\,x + 2$
Después trazamos varias rectas paralelas para observar que tienen la misma inclinación y concluimos que
Las rectas paralelas tienen la misma pendiente *(cambia la ordenada o queda igual cuando se superponen)*

- Luego hicimos el ejercicio de hallar una recta paralela a la recta **p** que pasa por el punto D:(**1**;**-1**). Como sabemos que es paralela planteamos la ecuación de la recta: $y = -1/3\,x + b$

Y como tiene que pasar por el punto D, reemplazamos los valores del punto: $-1 = -1/3 . 1 + b$, resolvimos y despejamos la ordenada $-1 + 1/3 = b$ resultando que $-2/3 = b$.
Entonces la ecuación de la recta sería $\boldsymbol{y = -1/3\,x - 2/3}$
También observamos que cuando la trazamos en el plano cartesiano del geogebra el software escribió la ecuación de la recta en otra forma pero que era lo mismo ya que si despejábamos la y, obteníamos la misma ecuación, así que:

$$y = -1/3\,x - 2/3 \;\; es\ igual\ x + 3y = -2$$



- Seguimos con la misma recta **p** pero graficamos una recta perpendicular con la misma ordenada.

De la observación de las pendientes obtuvimos que la recta $\boldsymbol{y = 3x + 2}$ recta perpendicular a $\boldsymbol{y = -1/3\,x + 2}$
Es decir que ***en dos rectas perpendiculares sus pendientes son “recíprocas y opuestas” ó “inversas y opuestas”****, es decir cambia el signo y la fracción se invierte.*

- Planteamos los siguientes ejemplos:
  1) hallar una <u>recta perpendicular</u> a $y = 2x + 4$ que tenga ordenada en el punto (0;-2):

$$y = -1/2\,x - 2$$

2) hallar la recta perpendicular a 2x+3y=6 que pase por el punto (0;-1)

$$3y = 6 - 2x$$
$$3y = -2x + 6$$
$$y = -2/3\,x + 6/3$$
$$y = -2/3\,x + 2$$

Esta es la recta del enunciado pero en dónde se despejó la ***y*** para saber la pendiente. A ésta le tengo que hallar la perpendicular

Entonces la recta perpendicular que pasa por (0;-1) sería:

Como el punto es (0;-1) ya me está dando la ordenada al origen

$$y = 3/2\,x - 1$$

3) hallar la recta perpendicular a $y = -4x + 1$ que pasa por el punto (4;0)

$$y = 1/4\,x + b$$

Reemplazo el punto en esa ecuación: $0 = 1/4 \cdot 4 + b$

$$0 = 1 + b$$
$$-1 = b$$

Entonces la ecuación de la recta perpendicular que pasa por ese punto es $y = 1/4\,x - 1$

Ejercitación

7 Unir cada sistema de ecuaciones con la condición que cumple.

a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ y - 2x = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 8 \\ y - x = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y - 3x = 1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2y - x = 6 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5y - x = 4 \\ y - 5x = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 6y - 4x = 1 \end{cases}$

Rectas paralelas

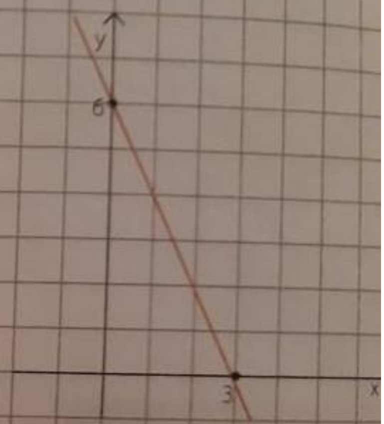
Rectas perpendiculares

Rectas oblicuas

8 Hallar la ecuación de la recta pedida en cada caso.

a) Paralela a la recta roja y que pase por el punto (−2 ; 1).

b) Perpendicular a la recta roja y que pase por el punto (4 ; −7).



9 Determinar si las rectas A y B son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

a) Recta A: pasa por (3 ; 3) y (−6 ; −2).
Recta B: pasa por (−1 ; 5) y (2 ; 1).

b) Recta A: pasa por (1 ; −5) y (4; 7).
Recta B: pasa por (−4 ; 2) y (8 ; −1).

10 **Escriban // o ⊥ según corresponda.**

a. $3y = x$ ☐ $(y + 1) = -3 \cdot (x - 1)$

b. $y - 1 = \frac{2}{3}x$ ☐ $y = -\frac{3}{2}x - 1$

c. $y = 3x - 1$ ☐ $y - 2 = 3 \cdot (x + 1)$

d. $y = -x$ ☐ $\frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1$

e. $\frac{x}{-6} + \frac{y}{4} = 1$ ☐ $(y + 1) = \frac{2}{3} \cdot (x - 3)$

f. $(y + 1) = 2 \cdot (x - 3)$ ☐ $\frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{-1} = 1$

g. $y - 4 = -3 \cdot (x + 1)$ ☐ $y = \frac{1}{3}x + 7$

h. $\frac{1}{2}y + \frac{3}{4}x = 1$ ☐ $y - 5 = \frac{2}{3} \cdot (x - 6)$

11 **Escriban en forma segmentaria las ecuaciones de las rectas.**

a. La recta M pasa por los puntos (2;3) y (–1;0).

____

____

b. La recta T es paralela a M y pasa por el punto (–3;1).

____

____

c. La recta R es perpendicular a T y pasa por el punto (–3;0).

____

____

12 **Completen la tabla teniendo en cuenta el punto indicado.**

Ecuación de la recta	Punto a	Recta paralela que pasa por a	Recta perpendicular que pasa por a
$y = 3x + 2$	**(4;1)**		
$-\frac{1}{8}x + y - 3 = 0$	**(2;0)**		
$-y = 5x$	**(-2;-1)**		
$\frac{x}{2} = \frac{y+3}{8}$	**(6;-2)**		
$y + 1 = \frac{1}{3}x$	**(-3;1)**		

Ejercicio de repaso. Hallar la ecuación de las rectas que cumplen las siguientes condiciones

a) A: tiene pendientes 3 y pasa por (2;-5)
b) B: es paralela a $y = 3 - 2x$ y pasa por (-3;1)
c) C: es perpendicular a $y = -3x + 1$ y pasa por (-4;-1)
d) D: pasa por (5;-4) y (1;4)

Sistema de Ecuaciones Lineales

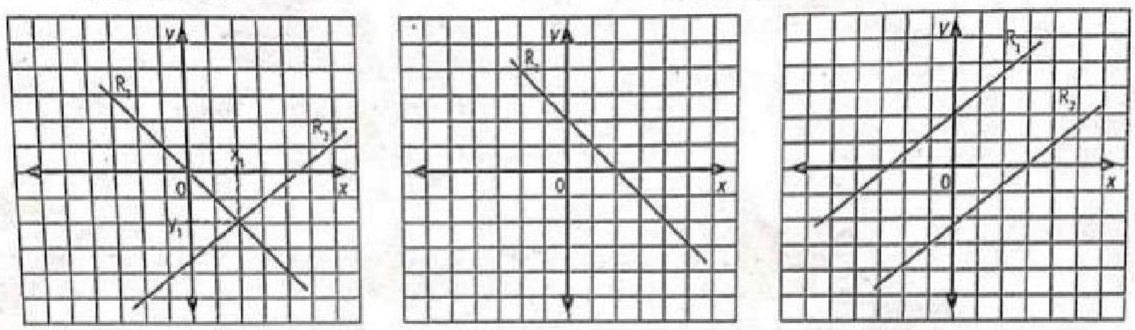
Un **sistema de ecuaciones lineales** formado por dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas cada una representa dos rectas en el plano, y resolverlo es hallar la intersección de ambas (conjunto solución).

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Dos rectas en un plano pueden ser **incidentes** (tienen un punto en común) o **paralelas** (no tienen ningún punto en común o son coincidentes).

Los sistemas se clasifican en **compatibles e incompatibles**, según tengan o no solución; los sistemas compatibles pueden ser **determinados** o **indeterminados**, según tenga una o infinitas soluciones.

Rectas **incidentes** — Rectas **paralelas**



$R_1 \cap R_2 = \{(x_1;y_1)\}$	$R_1 \cap R_2 = R_1 = R_2$	$R_1 \cap R_2 = \varnothing$
Determinado (solución única)	Indeterminado (infinitas soluciones)	Sistema incompatible (no tiene solución)

Resolución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales

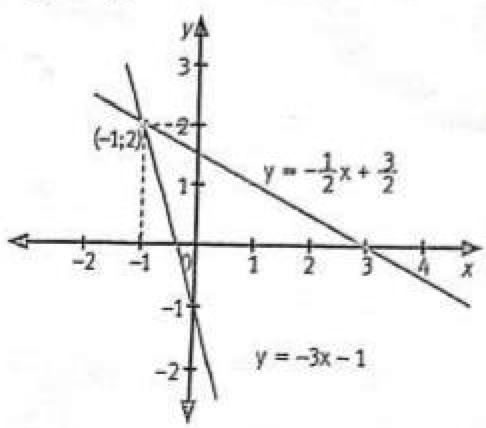
Para **resolver gráficamente** un sistema de ecuaciones, se deben representar ambas rectas en un mismo sistemas de ejes y hallar la intersección de ambas.

$$\begin{cases} 3x + y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -3x - 1 \\ y_2 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases}$$

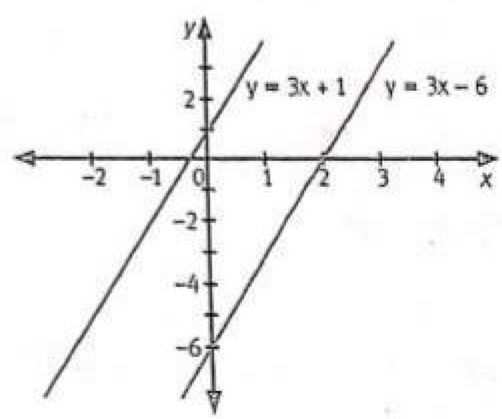
$S = \{(-1;2)\}$

$$\begin{cases} x - \frac{1}{3}y = 2 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 3x - 6 \\ y_2 = 3x + 1 \end{cases}$$

$S = \varnothing$



Sistema compatible determinado



Sistema incompatible

Actividad 1) Resuelvan gráficamente cada uno de los siguientes sistemas y clasifiquen.

1. $\begin{cases} x+y=-1 \\ -2x+y=5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y=0 \\ -3x-y=2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-y=5 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$

Resolución de sistemas de ecuaciones I

Para resolver analíticamente un sistema de ecuaciones, existen varios métodos. Todos ellos permiten obtener el mismo resultado, y la utilización de uno u otro dependerá de cómo está planteado el sistema original.

Método de sustitución

Se debe despejar una de las variables en una de las ecuaciones, y luego reemplazarla en la otra ecuación.

$\begin{cases} 2x+4y=2\ (a) \\ 3x-2y=9\ (b) \end{cases} \Rightarrow \quad (a)\ x=1-2y$ — 1. Se despeja x en la ecuación (a).

$3.(1-2y)-2y=9$ — 2. Se reemplaza la x por "$1-2y$" en la ecuación (b).

$3-6y-2y=9 \Rightarrow 3-8y=9 \Rightarrow -8y=6 \Rightarrow y=-\frac{3}{4}$ — 3. Se resuelve, obteniendo el valor de y.

$2x+4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=2 \Rightarrow 2x-3=2 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$ — 4. Se reemplaza el valor de y, en cualquiera de las dos ecuaciones, y se calcula el de x.

$S=\left\{\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{4}\right)\right\}$ — 5. Se escribe el conjunto solución.

Actividad 2) Resuelve el siguiente sistema de ecuación lineal, utilizando el método de sustitución.

$$\begin{cases} 3x+y=-3 \\ x+2y=4 \end{cases}$$

Método de igualación

Se debe despejar en ambas ecuaciones la misma incógnita y luego, igualar las ecuaciones obtenidas.

$\begin{cases} 2x-2y=\frac{3}{2} & (a) \\ 3x+y=\frac{5}{4} & (b) \end{cases}$

$(a): -2y=\frac{3}{2}-2x \Rightarrow y=x-\frac{3}{4} \qquad (b)\ y=\frac{5}{4}-3x$ — 1. Se despeja y de ambas ecuaciones.

$x-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}-3x \Rightarrow 4x=2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ — 2. Se igualan ambas ecuaciones y se calcula el valor de x.

$2.\frac{1}{2}-2y=\frac{3}{2} \Rightarrow -2y=\frac{1}{2} \Rightarrow y=-\frac{1}{4}$ — 3. Se reemplaza el valor de x obtenido, en cualquiera de las ecuaciones, y se calcula el de y.

$S=\left\{\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)\right\}$ — 4. Se escribe el conjunto solución.

Actividad 3) Resuelve el siguiente sistema de ecuación lineal aplicando el método de igualación.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 4x - 9y = -1 \end{cases}$$

Métodos de reducción por sumas y restas

Se igualan los coeficientes de una de las incógnitas en ambas ecuaciones multiplicando los dos miembros convenientemente, obteniéndose un **sistema equivalente** al dado, y luego se suman o restan ambas ecuaciones para eliminarla.

$\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ 2x - 4y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (5x - 2y).2 = 2.2 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$ 1. Se igualan los coeficientes de y.

$\begin{cases} 10x - 4y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases} +$; $12x \quad = 12$ 2. Se suman las ecuaciones, miembro a miembro.

$12x = 12 \Rightarrow x = 1$ 3. Luego, se calcula el valor de x.

$2.1 + 4y = 8 \Rightarrow 4y = 6 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$ 4. Se reemplaza el valor de x obtenido, en cualquiera de las dos ecuaciones, y se calcula el de y.

$S = \left\{\left(1; \frac{3}{2}\right)\right\}$ 5. Se escribe el conjunto solución.

Actividad 4) Resuelve el siguiente sistema de ecuación lineal aplicando el método de reducción.

5. $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = -5 \\ x + \frac{1}{3}y = -3 \end{cases}$

Actividad 5) Resuelvan analítica y gráficamente cada una de estos sistemas de ecuaciones.CLASIFICAR.

1) $\begin{matrix} y - x = 3 \\ 2y - 2x = 5 \end{matrix}$ **2)** $\begin{matrix} x + 2y = 9 \\ -3x + y = 8 \end{matrix}$ **3)** $\begin{matrix} -x + 3y = 4 \\ x - 2y = -2 \end{matrix}$ **4)** $\begin{matrix} y = x + 3 \\ x + 2y = 12 \end{matrix}$ **5)** $\begin{matrix} x + 1 = y \\ x = y - 4 \end{matrix}$ **6)** $\begin{matrix} x + y = -5/4 \\ 2x - y = 2 \end{matrix}$

Actividad 6) Lean atentamente, planteen un sistema de ecuaciones y resuelvan cada uno de los siguientes problemas.

a) La suma de dos números es - 42. El primero de ellos menos el segundo es 52. Calcular esos números.

b) La diferencia entre dos números es 16. Tres veces el mayor de ellos es nueve veces el más pequeño. ¿Cuáles son los números?

c) En una semana un comercio vendió 20 manteles. Los blancos costaban $12 cada uno y los estampados $18 cada uno. En total las ventas fueron de $288. ¿Cuántos manteles de cada clase se vendieron?

d) Hallar dos números sabiendo que su suma es - 1 y que el triplo de su diferencia es 5.

e) Determinar dos números que cumplan la siguiente condición: El mayor sea el doble del menor más 16, la suma entre $\frac{1}{4}$ del mayor y $\frac{1}{2}$ del menor sea 2.

f) Un juego de jardinería y 8 pares de guantes para jardinero cuestan $41. Un juego para jardinería y 12 pares de guantes de jardinero cuestan $ 57. ¿Cuánto cuesta cada par de guantes?

Unidad III: Función Cuadrática

A la función polinómica de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$, siendo a, b, c números reales y $a \neq 0$, se la denomina **función cuadrática.**

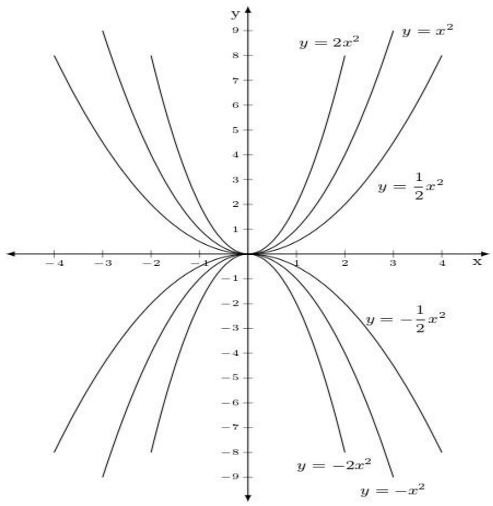
Los términos de la función cuadrática reciben los siguientes nombres:

$$y = \underbrace{ax^2}_{\text{término cuadrático}} + \underbrace{bx}_{\text{término lineal}} + \underbrace{c}_{\text{término independiente}}$$

El *dominio natural* de estas funciones es $\mathbb{R}$ (todos los números reales) y al representarlas gráficamente se obtiene una curva llamada *parábola.*

Cada parábola presenta un *eje de simetría* vertical y, sobre él, un punto llamado *vértice* en el cual la curva pasa de ser creciente a decreciente o viceversa.

Los *ceros* o *raíces reales* de una función cuadrática son las abscisas de los puntos de contacto entre su gráfica y el eje de las x.



Gráfica de la parábola

Para realizar el gráfico de la parábola. $f(x) = ax^2 + bx + c$, se deben calcular los elementos de la misma y luego representarla. Calculando las raíces, el vértice y la ordenada al origen, ya podemos realizar la gráfica.

Raíces de la parábola

Son los puntos de intersección de la parábola con el eje x. Es decir, $f(x) = 0$.

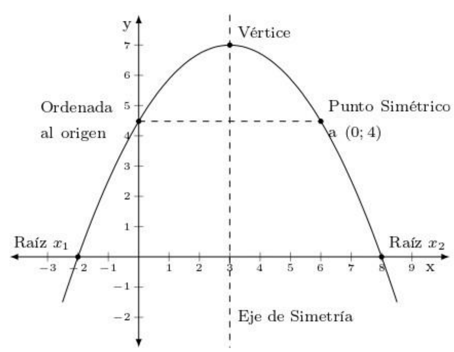
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dónde $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ es el Discriminante

Vértice de la parábola

Las coordenadas del vértice son: $V = (x_v \,; f(x_v))$.

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{o bien} \quad x_v = \frac{-b}{2a}$$



Ordenada al origen

Es el punto de intersección de la parábola con el eje y. Es decir, $f(0) = c$.

Eje de simetría

Es una recta vertical que divide la **parábola** en dos mitades congruentes.

El **eje de simetría** siempre pasa a través del vértice de la **parábola** y tiene por ecuación $x = x_v$.

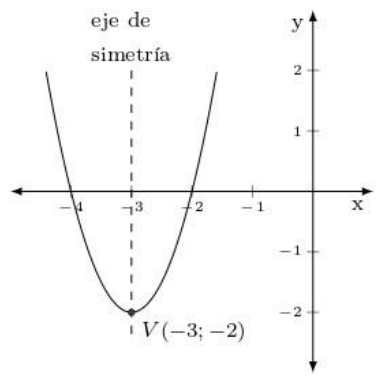
Valores máximos o mínimos: $\boldsymbol{y = y_v}$

Imagen: Si $a < 0 \to (-\infty;\ y_v). Si\ a > 0 \to (y_v; +\infty\ )$

Ejemplo: $y = 2x^2 + 12x + 16$

Representaremos sin tabla utilizando lo ya conocido:

1) Vértice
2) ordenada al origen
3) Cálculo de las raíces
4) Eje de simetría
5) Máximos y Mínimos
6) Dominio e Imagen.
7) Crecimiento y decrecimiento
8) Intervalos de positividad y negatividad.



<u>1) Vértice</u>

Abscisa $\longrightarrow$ $x_v = \dfrac{-b}{2a}$

$x_v = \dfrac{-12}{4}$

$x_v = -3$ $\longrightarrow$ Eje de simetría $(3\ ;\ 0)$

Ordenada $\longrightarrow$ $f(x_v) = 2(-3)^2 + 12(-3) + 16$

$= 2 \cdot 9 - 36 + 16$

$= -2$ $\longrightarrow$ Valor mínimo de la parábola

Vértice: $(-3\ ;\ -2)$

<u>2) Ordenada al origen:</u> c=16

Para tener en cuenta: el eje de simetría es la abscisa del vértice.

<u>3)</u> Cálculo de las <u>raíces:</u>

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\imath}$$

$$x_{1;2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 2 \cdot 16}}{2 \cdot 2}$$

$$x_{1;2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 128}}{4}$$

$$x_{1;2} = \frac{-12 \pm 4}{4} \qquad \begin{matrix} x_1 = -2 \\ x_2 = -4 \end{matrix}$$

Raíces: $(-2\ ;\ 0)(-4\ ;\ 0)$

<u>4) Eje de simetría</u>: $x = -3$

<u>5) Valores máximos o mínimos</u>: Como a>0, entonces tiene <u>valor mínimo</u>:$y_v = -2$

6) Dominio: $\mathbb{R}$; Imagen: $(-2; +\infty)$

7) Crece:$(-3;\ \infty)$ - Decrece: (- $\infty; -3)$

8) $C^+ = (-\infty; -4)$ U $(-2: +\infty)$ - $C^- = (-4; -2)$

Actividad 1) Completen la siguiente tabla. Luego, grafiquen las funciones en una hoja.

Función	a	b	c	Vértice	Eje de Simetría	RaícesReales	Ordenada al origen	Conjunto imagen
$y = 0{,}5x^2 - 8$								
$y = x^2 + 5x + 4$								
$y = -3x^2 + 6x$								
$y = -x^2 + 2x - 3$								

Actividad 2: Reconocer todos los elementos y luego representar gráficamente cada una de las siguientes funciones cuadráticas.

$a)\ f(x) = x^2 + 8x + 12$ $\quad b)\ g(x) = -x^2 + x + 1$ $\quad c)\ h(x) = x^2 - 2x + 1$

$d)\ y = x^2 + 2x + 3$ $\quad e)\ y = x^2 - 4x - 2$ $\quad f)\ y = -x^2 + 4x + 5$

$g)\ y = x^2 + 5x + 4$ $\quad h)\ y = -2x^2 - 4x + 3$ $\quad i)\ y = 3x^2 - 6x - 6$

$j)\ y = 4x^2 - 3x - 1$ $\quad k)\ y = -7x^2 + 28x + 21$ $\quad l)\ y = x^2 + 3x + 1$

Actividad 3:

Mauro patea una pelota cuya posición en función del tiempo está dada por la fórmula $p(t) = -3t^2 + 12t$ (p es la posición en metros y t el tiempo en segundos).

a) ¿Qué altura alcanza a los 4 segundos?
b) ¿En qué tiempo alcanza la altura máxima?
c) ¿Cuánto tarda en caer?
d) ¿Cuáles son los valores de "y" válidos en el contexto del problema?
e) Grafica la situación

Actividad 4:

Un arquero tira una flecha cuya altura (en metros) en función del tiempo (en segundos) está dada por la fórmula

$$h(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + 8$$

a) ¿Cuánto tiempo demora en llegar al piso?
b) ¿Desde qué altura fue lanzada?
c) ¿En qué instante alcanza la altura máxima? ¿Cuál es dicha altura?
d) ¿Qué altura alcanza a los 6 segundos de ser lanzada?
e) ¿En qué instante alcanza una altura de 12 m?
f) ¿En qué intervalo de tiempo la flecha asciende?

Te puede ayudar:
https://www.youtube.com/watch?v=Yng9FbUK2MY
https://www.youtube.com/watch?v=6UUlG_aRfxw
https://www.youtube.com/watch?v=Y7rvipk5NO4
https://www.youtube.com/watch?v=80xR6oxVYuI

Forma polinómica, canónica y factorizada

La función cuadrática puede ser expresada de distintas formas.

Polinómica: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Canónica: $f(x) = a \cdot (x - x_v)^2 + y_v$

Factorizada: $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

- ❖ Para pasar de la forma polinómica a la forma canónica se busca el vértice.
- ❖ Para pasar de la forma canónica a la forma polinómica se desarrolla el cuadrado del binomio.
- ❖ Para pasar de la forma polinómica a la forma factorizada se buscan las raíces.
- ❖ Para pasar de la forma factorizada a la forma polinómica se aplica la propiedad distributiva.

Actividad 2) Expresen en forma polinómica las siguientes funciones cuadráticas.

$a)\ y = 3 \cdot (x - 1)^2 + 2$ $b)\ y = (x - 3) \cdot (x + 1)$

$c)\ y = 4 \cdot (x + \sqrt{5}) \cdot (x - \sqrt{5})$ $d)\ y = -3 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)^2$

Actividad 3) Dadas las siguientes funciones de segundo grado:

$I)\ y = 4x^2 - 9x + 2$ $II)\ y = x^2 - 9$ $III)\ y = x^2 - 12x + 11$

a) Escriban en forma factorizada.

b) Grafiquen.

Actividad 4) Escriban en forma canónica:

$I)\ y = x^2 + 4x - 3$ $II)\ y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$ $III) - x^2 - 8x + 2$

Respondan para cada una:

a) ¿Cuál es el eje de simetría?

b) ¿Cuáles son las coordenadas del vértice?

c) ¿Tienen máximos o mínimos?

Raíces de una Función Cuadrática. Discriminante

Las raíces de una parábola $y = ax^2 + bx + c$ se calculan mediante la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Calculen en forma analítica las raíces de la función $y = x^2 - x - 6$.

$$a = 1\ ;\ b = -1\ ;\ c = -6$$

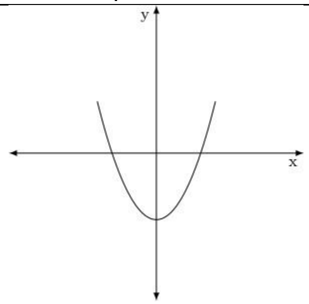
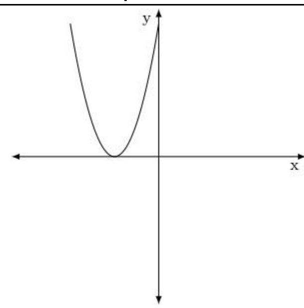
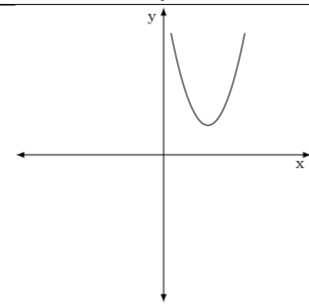
$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{+1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1 + 5}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{1 - 5}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

entonces resulta que las raíces son $x_1 = 3$ y $x_2 = -2$

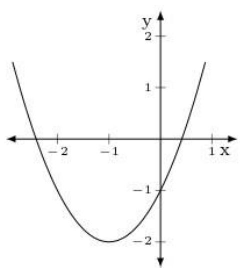
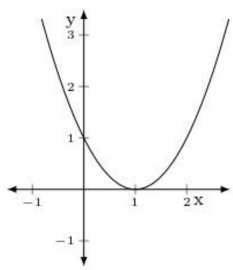
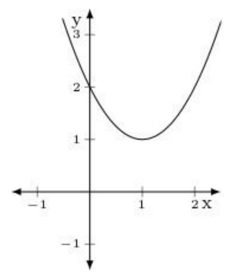
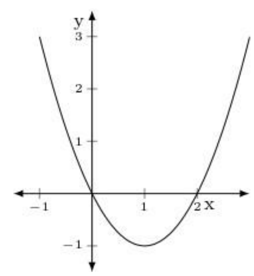
Al radicando $b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ se lo llama **discriminante**, ya que al valor del mismo se lo utiliza para discriminar la naturaleza de lasraíces (se lo simboliza con la letra griega Δ, delta).

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

	Discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$	
$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Dos raíces reales distintas. La función corta al eje x en dos puntos.	Una sola raíz real doble. La función corta al eje x en un solo punto.	Dos raíces complejas conjugadas. La función no corta al eje x.
		

Actividad 5) Marquen las opciones correctas.

a) ¿Cuál es la parábola que corresponde a la función $y = x^2 - 2x + 2$? Justificar por qué no corresponde el gráfico.

b) ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen raíces reales?

$a)\ y = -3x^2 - 2$ $\quad b)\ y = -4x^2 + 2x$ $\quad c)\ y = x^2 - 2x + 6$ $\quad d)\ y = x^2 + 5$

Actividad 7) Grafiquen las funciones definidas a continuación, reconozcan los elementos e indiquen:

Valores máximos o mínimos – Crecimiento y decrecimiento

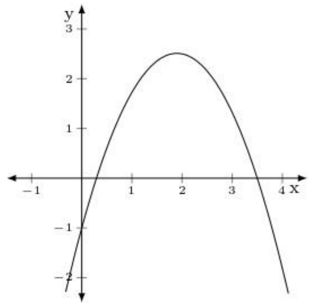
– Eje de simetría – Dominio ~~e~~ Imagen – Intervalos de positividad y negatividad –

a) $y = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

b) $y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 5)$

c) $y = x^2 + 3x + 2$

Actividad 8) Tengan en cuenta el gráfico de la función y escriban V (Verdadero) o F (Falso) según corresponda.



a) $\Delta < 0$

b) Tiene raíces reales

c) Alcanza su valor mínimo en el vértice

d) Crece en el intervalo $(-\infty\,;-2)$

e) Tiene ordenada al origen negativa

Actividad 9) Resuelvan los siguientes problemas:

1) Supongamos que el rendimiento intelectual de una persona que estudia desde la 9 hs hasta las 13 hs responde a la función $R = 4t - t^2$, donde R es el rendimiento y t el tiempo transcurrido desde las 9 hs, medido en horas.

a) ¿A qué hora se obtiene el mayor rendimiento?

b) ¿Cuál es el intervalo de mejor aprovechamiento?

c) Graficar.

2) Un nadador cae de un trampolín y tarda 1,5 segundos en llegar al agua. ¿Desde qué altura saltó?

Siendo la aceleración de la gravedad $g = 9.8\frac{m}{s^2}$ y $y = \frac{g \cdot t^2}{2}$

3) Si un niño lanza una piedra violentamente hacia arriba con una velocidad de $10\frac{m}{s}$.

a) ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar la altura máxima?

b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la piedra?

c) ¿Cuál es el dominio de la función?

4) Una pelota de fútbol que está sobre el piso recibe una patada hacia arriba; si la altura que alcanza en metros viene dada por la fórmula $y = 3t + (-\frac{3}{4}) \cdot t^2$ donde t se mide en segundos.

a) ¿En qué instante alcanza la altura máxima?

b) ¿Cuál es la altura?

c) ¿A los cuántos segundos vuelve a tocar el piso?

5) Pedro vende zapatillas importadas; por esa venta tiene un ingreso que calcula con la fórmula

$y = x \cdot (x + 5)$, siendo x el número de zapatillas vendidas.

a) Grafiquen y analicen qué parte de la gráfica modeliza esta situación.

b) ¿Cuál es el dominio?. c) ¿Cuáles son los ingresos si vende 500 zapatillas?

Unidad IV: Módulo. Ecuaciones e Inecuaciones con módulo

4 Módulo de un real. Propiedades

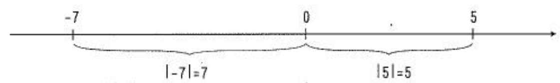
*El **módulo** o **valor absoluto** de un número real es su distancia al cero sobre la recta real.*

Para todo número real x, su módulo se expresa: $|x|$.

$$\forall x \in \mathbb{R}: |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a) $|5| = 5$

b) $|-7| = -(-7) = 7$



Propiedades

1) $|x| \geq 0$

a) $|-6,5| = -(-6,5) = 6,5$ **b)** $\left|\frac{7}{8}\right| = \frac{7}{8}$ **c)** $|0| = 0$

2) $|x| = |-x|$

a) $|0,02| = |-0,02| = -(-0,02) = 0,02$ **b)** $|132| = |-132| = -(-132) = 132$

3) $|x + y| \leq |x| + |y|$

a) $|8 + 4,1| \leq |8| + |4,1|$
$|12,1| \leq 8 + 4,1$
$12,1 \leq 12,1$

b) $|1,4 + (-2)| \leq |1,4| + |-2|$
$|-0,6| \leq 1,4 + 2$
$0,6 \leq 3,4$

c) $|-5 + (-1,4)| \leq |-5| + |-1,4|$
$|-6,4| \leq 5 + 1,4$
$6,4 \leq 6,4$

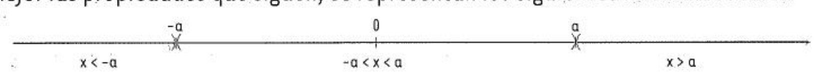
4) $|x.y| = |x|.|y|$

a) $|6.(-5)| = |6|.|-5|$
$|-30| = 6.5$
$30 = 30$

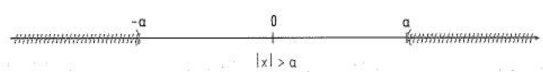
b) $|8.3| = |8|.|3|$
$|24| = 8.3$
$24 = 24$

c) $|-0,1.(-9,5)| = |-0,1|.|-9,5|$
$|0,95| = 0,1.9,5$
$0,95 = 0,95$

Para entender mejor las propiedades que siguen, se representan los siguientes intervalos reales:



5) $|x| > a \wedge a > 0 \Rightarrow x > a \vee x < -a \Rightarrow x \in (-\infty;-a) \cup (a,+\infty)$



a) $|x| > 6 \Rightarrow x > 6 \vee x < -6 \Rightarrow x \in (-\infty;-6) \cup (6;+\infty)$

b) $|x| \geq 2,5 \Rightarrow x \geq 2,5 \vee x \leq -2,5 \Rightarrow x \in (-\infty;-2,5] \cup [2,5;+\infty)$

6) $|x| < a \wedge a > 0 \Rightarrow -a < x < a \Rightarrow x \in (-a;a)$

a) $|x| < 8 \Rightarrow -8 < x < 8 \Rightarrow x \in (-8;8)$

b) $|x| \leq \frac{9}{2} \Rightarrow -\frac{9}{2} \leq x \leq \frac{9}{2} \Rightarrow x \in \left(-\frac{9}{2};\frac{9}{2}\right)$

Ecuaciones con módulo

Teoría

El **módulo** o **valor absoluto** de un número real es su distancia al cero en la recta real.

$$|a| \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$|x| = 6 \Rightarrow x = 6 \vee x = -6$

Para resolver una ecuación con módulo debe aplicarse que: $\boxed{|x| = a \Rightarrow x = a \vee x = -a \Rightarrow x = \pm a}$

a) $|x + 2| = 5 \Rightarrow x + 2 = 5 \vee x + 2 = -5 \Rightarrow x = 5 - 2 \vee x = -5 - 2 \Rightarrow x_1 = 3 \vee x_2 = -7$

b) $3|x - 1| + 5 = 23 \Rightarrow 3|x - 1| = 18 \Rightarrow |x - 1| = 6 \Rightarrow x - 1 = 6 \vee x - 1 = -6 \Rightarrow x_1 = 7 \vee x_2 = -5$

c) $2|x + 3| + 8 = 0 \Rightarrow 2|x + 3| = -8 \Rightarrow |x + 3| = -4 \Rightarrow x \notin R \Rightarrow$ La ecuación no tiene solución real.

Ejercitación

25 **Colocar >, < o = según corresponda.**

a) $|3| \ \square \ |-5|$

b) $|-10| \ \square \ |-10 + 1|$

c) $|4 - 1| \ \square \ |1 - 4|$

d) $-1 - 7 \ \square \ |-1 - 7|$

e) $|-6| + |-3| \ \square \ |-9|$

f) $|-5| - |3| \ \square \ |-5 - 3|$

g) $|8 - 3| \ \square \ |8| - |3|$

h) $|5| - |9| \ \square \ |5 - 9|$

i) $|-3| . |2| \ \square \ |-3 . 2|$

j) $-4 . |-5| \ \square \ |-4| . (-5)$

26 **Hallar, si existen, los valores de a que verifiquen la igualdad.**

a) $|a| + 5 = 7$

d) $3 + |a| = 1$

g) $|a + 1| = -2$

b) $3 . |a| = 18$

e) $|a + 1| = 0$

h) $|a| : 2 = 6$

c) $-4 + |a| = 2$

f) $8 - |a| = 3$

i) $2|a| = -4$

27 **Unir cada ecuación con su solución.**

a) $|x+7| = 3$

b) $|x-4| = 6$

c) $|x+3| = 9$

d) $|x-1| = 5$

e) $|x+2| = 8$

f) $|x-6| = 2$

$x_1 = -10 \vee x_2 = -4$

$x_1 = 6 \vee x_2 = -10$

$x_1 = 2 \vee x_2 = -8$

$x_1 = 8 \vee x_2 = 4$

$x_1 = -4 \vee x_2 = 6$

$x_1 = 6 \vee x_2 = -12$

$x_1 = 10 \vee x_2 = -2$

28 **Resolver y verificar las siguientes ecuaciones.**

a) $2|x+1| - 3 = 7$

e) $-5 \cdot |x+4| + 11 = 1$

b) $|3-x| : 2 + 1 = 9$

f) $3 + |x| = 3x - 5$

c) $|3x+2| = 11$

g) $|x+6| - 2 = 2x + 1$

d) $|2x-1| - 5 = 8$

h) $|4x-1| = 3x - 13$

Para pensar y resolver

29 **Resolver la siguiente ecuación:** $|x+1| + |x| = 3$.

Inecuaciones lineales

Teoría

Resolver una inecuación es encontrar el intervalo real de valores que la verifican y se utilizan los mismos procedimientos que para resolver una ecuación, salvo en el caso en que se multiplique o divida a ambos miembros por un número negativo, en cuyo caso se invierte el sentido de la desigualdad.

a) $3x + 1 < 5x + 7$

$3x - 5x < 7 - 1$

$-2x < 6$

$x > 6 : (-2)$

$x > -3$

$S = (-3 ; +\infty)$

b) $2x + 1 \geq 5x - 11$

$2x - 5x \geq -11 - 1$

$-3x \geq -12$

$x \leq -12 : (-3)$

$x \leq 4$

$S = (-\infty ; 4]$

c) $\frac{4x + 1}{-3} > 1 - 2x$

$4x + 1 < (1 - 2x) . (-3)$

$4x + 1 < -3 + 6x$

$4x - 6x > -3 - 1$

$-2x > -4$

$x < -4 : (-2)$

$x < 2$

$S = (-\infty ; 2)$

Ejercitación

30 **Resolver las siguientes inecuaciones.**

a) $2x - 7 \geq 5x + 8$

d) $0{,}8(2x - 5) - 0{,}6x > 3x - 10$

g) $1 - \frac{x + 2}{5} \geq 0{,}4x - 3$

b) $-7x + 15 < 2(x - 6)$

e) $1 - 4(x + 3) < x + 9$

h) $(2 - 3x) : (-2) \leq \frac{3x + 1}{5}$

c) $3(x + 2) - 1 \leq 7x - 3$

f) $\frac{3x - 5}{2} > 3x + 8$

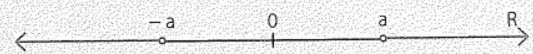
i) $\frac{3x - 4}{2} + \frac{2x - 3}{4} > x - 1$

Inecuaciones lineales con módulo

Teoría

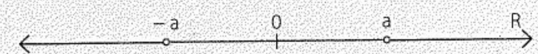
Para resolver inecuaciones lineales con módulo deben aplicarse dos propiedades del módulo:

- $|x| > a \wedge a > 0 \Rightarrow x > a \vee x < -a \Rightarrow x \in (-\infty\,;-a) \cup (a\,;+\infty)$



$|x| > a$

- $|x| < a \wedge a > 0 \Rightarrow -a < x < a \Rightarrow x \in (-a\,;a)$



$|x| < a$

a) $|x| \geq 5 \Rightarrow x \geq 5 \vee x \leq -5 \Rightarrow S = (-\infty\,;-5] \cup [5\,;+\infty)$

b) $|x| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4 \Rightarrow S = [-4\,;4]$

c) $|2x-1| > 7 \Rightarrow 2x-1 > 7 \vee 2x-1 < -7 \Rightarrow 2x > 8 \vee 2x < -6 \Rightarrow x > 4 \vee x < -3 \Rightarrow S = (-\infty\,;-3) \cup (4\,;+\infty)$

d) $|x+5| < 3 \Rightarrow -3 < x+5 < 3 \Rightarrow -3-5 < x < 3-5 \Rightarrow -8 < x < -2 \Rightarrow S = (-8\,;-2)$

Ejercitación

31 Escribir el intervalo solución.

a) $|x| \leq 7$ b) $|x| > 10$ c) $|x| < 6$ d) $|x| \geq 8$

32 Resolver las siguientes inecuaciones.

a) $|x+3| < 7$ d) $|x+5| > 9$ g) $2|x+5| - 1 \geq 3$

b) $|x-1| \geq 8$ e) $|2x+1| \leq 7$ h) $|x| \leq 2x - 6$

c) $|x-4| \leq 10$ f) $|3x-2| < 5$ i) $3 + |x+2| > 7 + 2x$

Tarea para el hogar

37 **Colocar V (verdadero) o F (falso) según corresponda.**

a) $|-10| > -10$ ☐

b) $|-4-3| < |-8|$ ☐

c) $|-7| - |-8| > 0$ ☐

d) $|-2 \cdot 6| = |-2| \cdot |6|$ ☐

e) $|-5+8| = |-5| + |8|$ ☐

f) $-3|-7| = |-3 \cdot (-7)|$ ☐

g) $|-2-(-9)| = |-2| - |-9|$ ☐

h) $|-6| + |-3| = |-6-3|$ ☐

38 **Hallar el conjunto solución de cada ecuación.**

a) $|x+3| + 5 = 1$

b) $|2x+1| = 7$

c) $|5x-3| = 0$

d) $|3x-4| = 8$

e) $2|x-3| - 1 = 5$

f) $4|3x-2| + 7 = 23$

39 **Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones.**

a) $-5x + 8 - x > 2(x-5)$

b) $2(3x-1) + 7 \leq 11x - 10$

c) $\frac{x-2}{3} \geq 0,\widehat{2}x + \frac{1}{2}$

d) $\frac{3}{4}\left(0,\widehat{8}x - 1\right) + 0,5 > \frac{1}{6}x$

e) $\frac{3x-4}{5} - 0,7x < \frac{6x+1}{10}$

f) $1,\widehat{3}\left(\frac{6x-3}{4}\right) - \frac{x-1}{6} \geq 1$

40 **Colocar V (verdadero) o F (falso) según corresponda.**

a) $|x| < 5 \Rightarrow x \in [-5\,;\,5]$ ☐

b) $|x| \geq 2 \Rightarrow x \notin (-2\,;\,2)$ ☐

c) $|x| < 1 \Rightarrow x \in (0\,;\,1)$ ☐

d) $|x| \geq 0 \Rightarrow x \in R$ ☐

e) $|x| > 0 \Rightarrow x \in (0\,;\,+\infty)$ ☐

f) $|x| \geq -3 \Rightarrow x \notin R$ ☐

41 **Resolver las siguientes inecuaciones.**

a) $|x - 2| \leq 5$

e) $|x + 3| < 3x + 7$

i) $x(x - 4) + 6x \geq 3$

b) $|2x - 3| > 9$

f) $4x^2 - 73 \leq 27$

j) $2x(5x - 1) \leq 7x(x + 1)$

c) $3|x + 4| - 1 < 11$

g) $x(x + 3) > 5x$

k) $(x - 3)^2 < 3x - 11$

d) $5 + 2|x - 5| \geq 13$

h) $(x - 1)^2 < 49$

l) $(2x - 1)^2 > 325 - 4x$

Ejercicios de repaso

48 **Resolver las siguientes ecuaciones.**

a) $3|x-2|-5=19$

b) $|2x+7|+1=12$

c) $3-2|x-3|=-11$

d) $|2x+5|=x+3$

49 **Hallar el conjunto solución.**

a) $x-5-7x\leq 2(4-x)+3$

b) $\dfrac{2x-1}{5}>0{,}8x-\dfrac{1-3x}{2}$

c) $0{,}\widehat{5}(1{,}2x-0{,}24)+0{,}2\widehat{6}<x$

d) $\dfrac{1-2x}{6}-\dfrac{5x-2}{3}\geq 0{,}\widehat{4}x-0{,}\widehat{6}$

50 **Resolver las siguientes inecuaciones.**

a) $|3x-2|+1\geq 8$

b) $5-|x+1|>1$

c) $|x+3|-1<2x+5$

d) $(x-1)^2\leq 121$

e) $(x-3)(x+4)\geq x$

f) $(x+5)(x-5)>24$

g) $(2x-3)^2+5x\geq 3(x^2-1)$

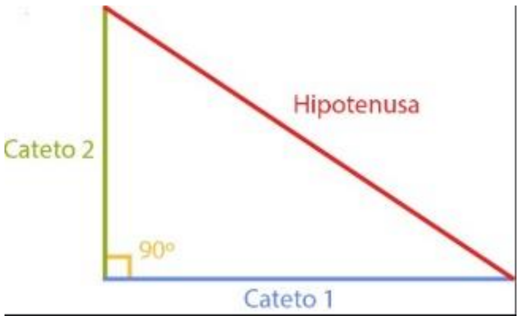
h) $(3x-2)(1-x)>2(x-1)$

i) $(5-x)^2\leq 2x(x-5)$

Unidad V: Trigonometría

La trigonometría es una rama de la matemática que estudia las relaciones entre las medidas de los lados y los ángulos de un triángulo. En este caso sólo estudiaremos las medidas de los **triángulos rectángulos**, es decir, los triángulos en donde la amplitud de uno de sus ángulos es 90° (un recto).

ELEMENTOS DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

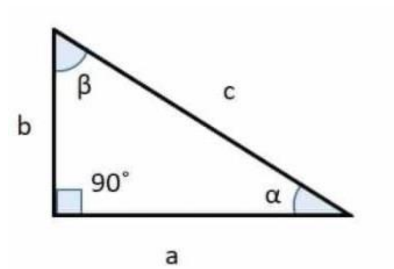


- Los lados que forman el ángulo recto se llaman **catetos**.
- El lado opuesto al ángulo de 90° se llama **hipotenusa** y siempre será el lado de mayor longitud.
- Un triángulo rectángulo, tiene **un ángulo recto** (90°) y los otros **dos agudos** (menos de 90° grados)

Propiedades del triángulo rectángulo

En cualquier triángulo rectángulo, se verifica que:

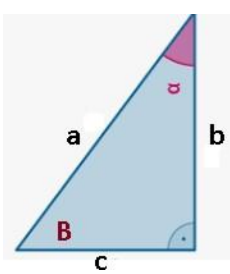
- $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90° \rightarrow Relación\ entre\ ángulos\ agudos$
- $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow Relación\ entre\ sus\ lados$. Esta segunda propiedad es más conocida como el *Teorema de Pitágoras*. **Video sugerido**: https://youtu.be/rPlfmJDHfog

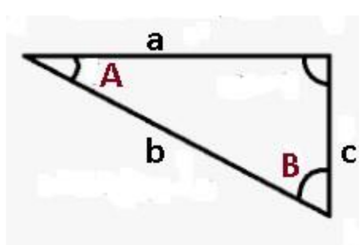


Observando el triángulo rectángulo, tenemos que:

✓ Respecto de $\hat{\alpha}$ el lado **b** es el *cateto opuesto* y el lado **a** es el *cateto adyacente*.
✓ Respecto de $\hat{\beta}$: el lado **a**es el *cateto opuesto* y el lado **b** es el *cateto adyacente.*
✓ Respecto a ambos ángulos, el lado **c** siempre es la *hipotenusa.*

Actividad 1) Observar los siguientes triángulos y completar:

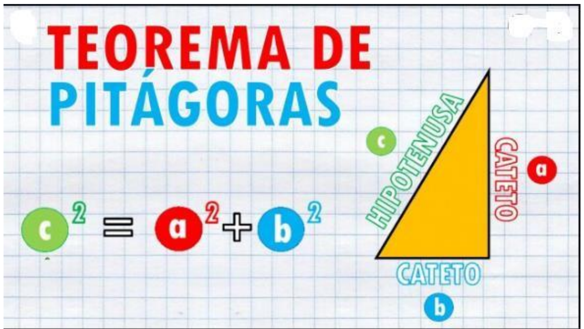




El cateto opuesto de α es………………..
El cateto adyacente de B es……………..
Si B=73°, entonces α=……………………

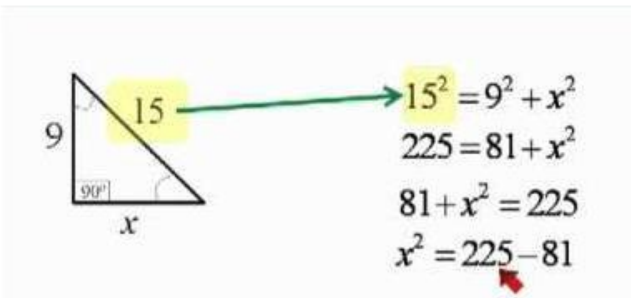
La hipotenusa, es el lado………………………
el cateto adyacente de A es……………………
Si A= 22°, entonces B=………………………………

Ejemplos de Teorema de Pitágoras



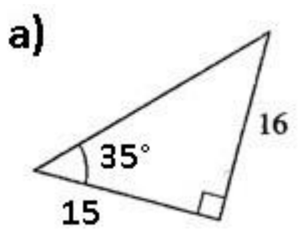
- Es una fórmula en la cual debemos reemplazar dos valores que serán los datos y calcular un tercero.
- Podemos tener como datos dos catetos y hallar la hipotenusa.
- podemos tener de datos la hipotenusa y un cateto y hallar el otro cateto.

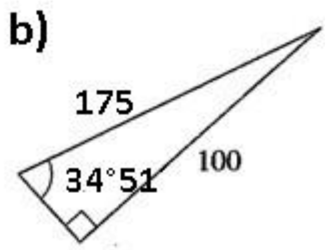
EJEMPLO 1) Hallar el valor del cateto.



$$\boldsymbol{x = \sqrt{144}}$$
$$\boldsymbol{x = 12}$$

Actividad 2) Halar el valor de los lados y ángulos de los siguientes triángulos. (teorema de Pitágoras y propiedades de los ángulos)

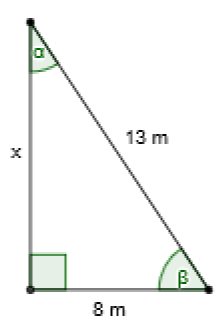




El Teorema de Pitágoras en la vida cotidiana:

Una torre de alta tensión tiene un cable que tiene un extremo fijo en el suelo. La longitud del cable es de 13 m. La distancia entre el pie de la torre y el punto donde se sujeta el cable al piso es de 8 m.

¿Cuál es la altura de la torre? ¿Qué propiedades podemos emplear para hallarla?



Realizamos un bosquejo de la misma y resolvemos:

Para determinar la altura de la torre, x, debemos aplicar la segunda propiedad enunciada (Teorema de Pitágoras):

$$13^2 = 8^2 + x^2$$
$$13^2 - 8^2 = x^2$$
$$\sqrt{13^2 - 8^2} = x$$

$$\sqrt{105} \cong 10{,}25 = x$$

Por lo tanto <u>la torre de alta tensión mide 10,25 metros</u>.

Actividad 3) Realizar una figura de análisis (un triangulo rectángulo) y resolver:

a) Un empleado de la EPE se encuentra trabajando en un edificio. Está en la punta de una escalera de 5 metros de largo que está apoyada en la pared. Si la distancia de la pared al pie de la escalera es de 2 metros. ¿A qué altura se encuentra la persona trabajando?

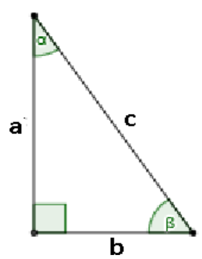
b) Un poste de madera tiene 8 metros de altura. Se quieren sujetar tres cables desde el extremo superior del poste al suelo. Si la distancia de la base del poste al cable es de 3 metros. ¿Cuántos metros de cable se necesitan?

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Hasta ahora trabajamos calculando ángulos del triángulo rectángulo, teniendo como datos sólo ángulos y hallamos lados del triángulo teniendo como datos solo lados. Esto se debe a las magnitudes, es decir, la unidad de medida de los ángulos son los grados (sistema sexagesimal) mientras que la unidad de medida de los lados es la LONGITUD (metros, centímetros, kilómetros).

Ahora cuando tengamos que realizar cálculos y tengamos como datos un ángulo y un lado, aplicaremos las razones trigonométricas.

<u>Razones trigonométricas:</u> Las razones trigonométricas relacionan la amplitud de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo con longitud de los lados y se definen de la siguiente manera:

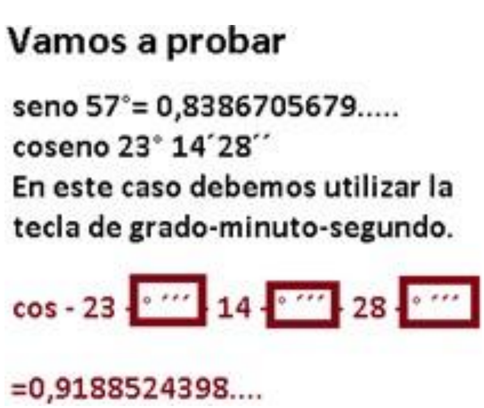


Seno de un ángulo agudo: $\frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa} \rightarrow sen\hat{\alpha} = \frac{b}{c}$ y $sen\hat{\beta} = \frac{a}{c}$

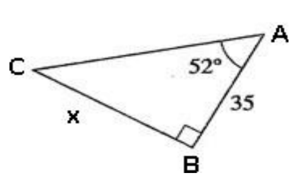
Coseno de un ángulo agudo: $\frac{Cateto\ Adyacente}{Hipotenusa} \rightarrow cos\hat{\alpha} = \frac{a}{c}$ y $cos\hat{\beta} = \frac{b}{c}$

Tangente de un ángulo agudo: $\frac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ Adyacente} \rightarrow tg\,\hat{\alpha} = \frac{b}{a}$ y $tg\,\hat{\beta} = \frac{a}{b}$

Para poder realizar los cálculos, necesitarás calculadora científica.



Ejemplo 1) Hallar el valor de "x"



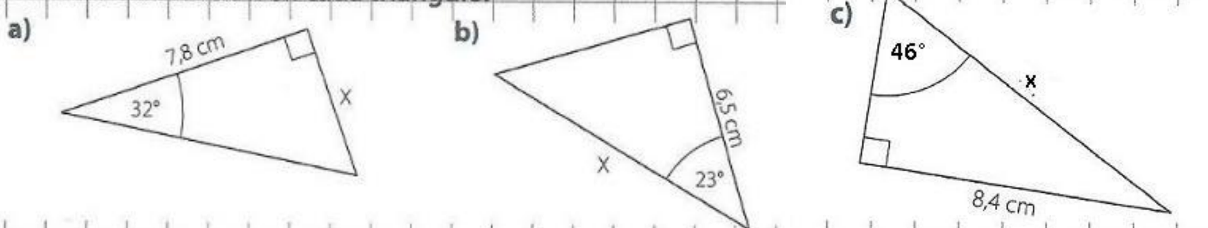
Datos: el ángulo A= 52° y Lado AB = 35cm
Incógnita: Lado BC

- El objetivo es hallar un lado.
- Si queremos aplicar Pitágoras, no podemos porque nos faltaría un lado como dato.
- Tenemos que aplicar las razones trigonométricas.
- ¿Cuál? Miramos el ángulo A y observemos que AB=35 es el cateto adyacente y CB = x, es el cateto opuesto
- Busquemos cuales de las razones trigonométricas relacionan un ángulo con **<u>el cateto opuesto y el cateto adyacente:</u>**
- La opción es la tangente, entonces reemplazamos en la razón con los datos y la incógnita:

$$despejamos\ x \begin{cases} tg52° = \dfrac{x}{35} \\ 1{,}279999 = \dfrac{x}{35} \\ 1{,}279999 \cdot 35 = x \\ 44{,}79 \cong x \end{cases}$$

Actividad 4)

Calcular el valor de x en cada triángulo.

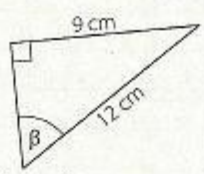


Cálculo de un ángulo agudo conocidos dos lados

Teoría

Para calcular la amplitud de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo cuando se conoce la longitud de dos de sus lados, se deben utilizar las razones trigonométricas y la calculadora científica.

a)

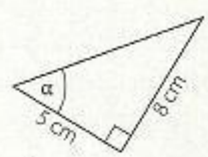


$\operatorname{sen}\hat{\beta} = \dfrac{9cm}{12cm} \Rightarrow \hat{\beta} = \operatorname{arcsen} 0{,}75 \Rightarrow \hat{\beta} = 48°35'25''$

Secuencia de teclas en la calculadora:

SHIFT → sin → 0,75 → = → ° ′ ″

b)



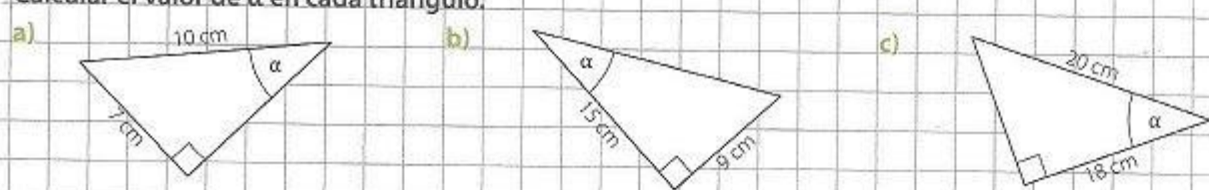
$\operatorname{tg}\hat{\alpha} = \dfrac{8cm}{5cm} \Rightarrow \hat{\alpha} = \operatorname{arctg} 1{,}6 \Rightarrow \hat{\alpha} = 57°59'41''$

Secuencia de teclas en la calculadora:

SHIFT → tan → 1,6 → = → ° ′ ″

Actividad 5)

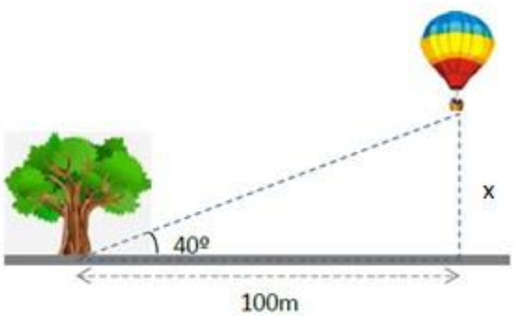
Calcular el valor de $\hat{\alpha}$ en cada triángulo.



¿PARA QUÉ SIRVE LA TRIGONOMETRÍA?

Situación 1)

¿A qué altura se encuentra el globo aerostático?



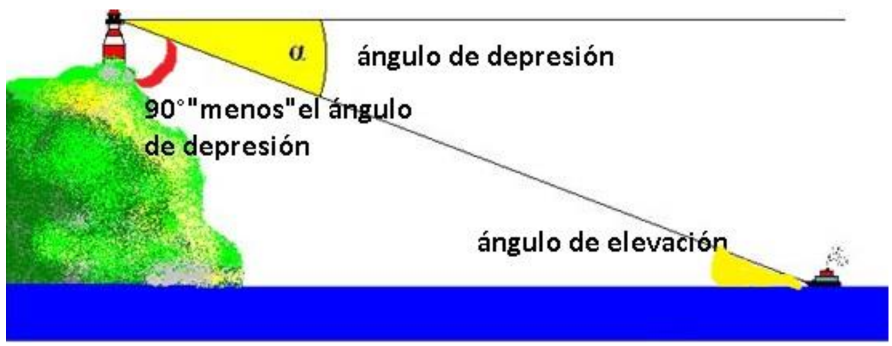
Cuando tenemos estos problemas debemos ver cuáles son los datos que tenemos para saber que propiedad aplicar.

Datos: x es el <u>lado opuesto</u> y el lado de 100m es <u>lado adyacente</u> al ángulo de 40°, por lo tanto debemos utilizar la tangente del ángulo dado para hallar x.

$$tg\ 40° = \frac{x}{100}$$
$$tg\ 40° \cdot 100 = x$$
$$83{,}91 = x$$

Por lo tanto el globo aerostático se encuentra a **casi 84 metros de altura.**

Para tener en cuenta: el ángulo de DEPRESIÓN, es igual al ángulo de ELEVACIÓN!

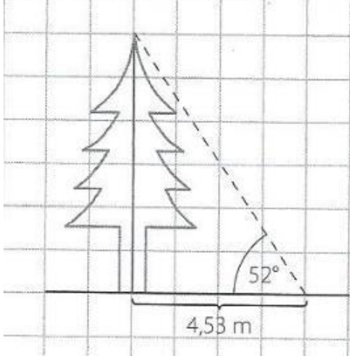


Actividad 6) Observar el gráfico y calcular:

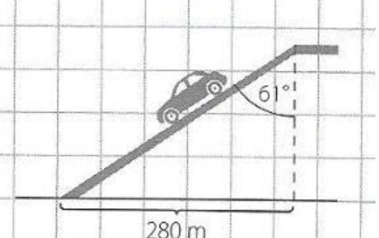
a) ¿A qué distancia de su pie se observa la torre?

b) ¿Con qué ángulo se observa la punta del árbol?

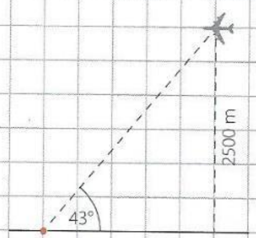
c) La altura del árbol.



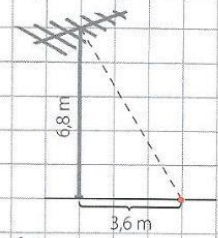
d) La longitud de la rampa.



e) La distancia del avión al punto rojo.



f) El ángulo de depresión de la punta de la antena al punto rojo.



Actividad 7)

Realizar la figura de análisis, plantear y resolver.

a) Si un barrilete está sostenido por un hilo de 32,54 m de largo y tiene un ángulo de elevación de 79°, ¿a qué altura está el barrilete?

c) Un avión se encuentra a una altura de 1.850 m y está descendiendo hacia un aeropuerto que se encuentra a 4.780 m. ¿Cuál es el ángulo de descenso del avión?

b) Un piso de un cine tiene una longitud de 56,23 m. Si se coloca un entarimado con una inclinación de 12° para las butacas, ¿cuál es la longitud del entarimado?

d) Para descargar un camión, se coloca una rampa de 4,73 m que se apoya a 3,94 m del camión. ¿Cuál es el ángulo de elevación de la rampa?

e) Se sube un paquete por una rampa que tiene una inclinación de 23° y una longitud de 5,80 m. ¿A qué altura se sube el paquete?

f) El tensor de una antena está amarrado a 50 m de su pie y tiene un ángulo de elevación de 73°. ¿A qué altura de la antena está agarrado el tensor?

g) La cima de una montaña se observa a 800 m de su pie con un ángulo de elevación de 64°. ¿A qué distancia de la cima se encuentra el observador?

h) ¿Cuál es el ángulo de elevación de un avión que recorre 5.200 m en el aire y alcanza una altura de 3.000 m?

PARADA TEÓRICA 53

Teoremas del seno y del coseno

Los siguientes teoremas relacionan los lados de cualquier triángulo con sus ángulos interiores.

Teorema del seno

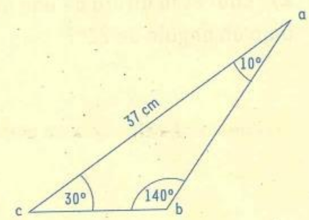
En todo triángulo sus lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

$$\frac{\overline{ab}}{\operatorname{sen}\hat{c}} = \frac{\overline{ac}}{\operatorname{sen}\hat{b}} = \frac{\overline{bc}}{\operatorname{sen}\hat{a}}$$

Para calcular los lados $\overline{ab}$ y $\overline{cb}$ se aplica el teorema del seno.

$$\frac{37\text{ cm}}{\operatorname{sen}140°} = \frac{\overline{ab}}{\operatorname{sen}30°} \Rightarrow \overline{ab} \cong 28{,}78\text{ cm}$$

$$\frac{37\text{ cm}}{\operatorname{sen}140°} = \frac{\overline{cb}}{\operatorname{sen}10°} \Rightarrow \overline{cb} \cong 10\text{ cm}$$



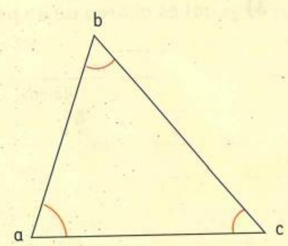
Teorema del coseno

El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de dichos lados por el coseno del ángulo que forman.

$$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 - 2.\overline{ab}.\overline{ac}.\cos\hat{a}$$

$$\overline{ac}^2 = \overline{bc}^2 + \overline{ab}^2 - 2.\overline{bc}.\overline{ab}.\cos\hat{b}$$

$$\overline{ab}^2 = \overline{bc}^2 + \overline{ac}^2 - 2.\overline{bc}.\overline{ac}.\cos\hat{c}$$

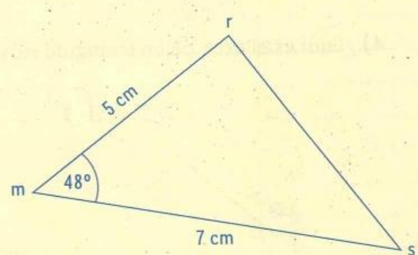


Para calcular el lado $\overline{rs}$ se aplica el teorema del coseno.

$$\overline{rs}^2 = \overline{mr}^2 + \overline{ms}^2 - 2.\overline{mr}.\overline{ms}.\cos\hat{m}$$

$$\overline{rs}^2 \cong 25\text{ cm}^2 + 49\text{ cm}^2 - 2.5\text{ cm}.7\text{ cm}.0{,}67$$

$$\overline{rs}^2 \cong 27{,}1\text{ cm}^2 \Rightarrow \overline{rs} \cong 5{,}21\text{ cm}$$



El **teorema de Pitágoras** es un caso particular del teorema del coseno.

$$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 - 2.\overline{ab}.\overline{ac}.\cos\hat{a}$$

$$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 - \underbrace{2.\overline{ab}.\overline{ac}.\cos 90°}_{0}$$

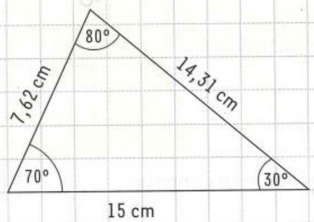
$$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2$$

PARADA PRÁCTICA 53

Teoremas del seno y del coseno

VERIFICACIÓN 53

- **Escriban las relaciones que establecen el teorema del seno y del coseno con los datos de la siguiente figura y verifiquen aproximadamente los resultados.**

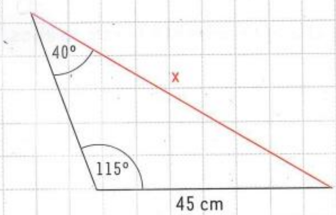


APLICACIÓN 53

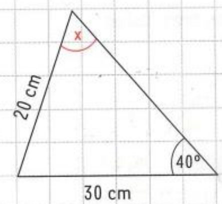
Ejercicio 53.1

- **Calculen el valor de x en cada una de las figuras.**

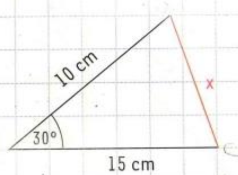
1)



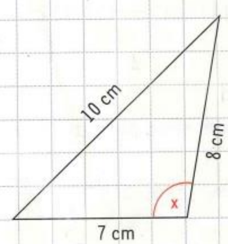
3)



2)



4)



PARADA TEÓRICA 54

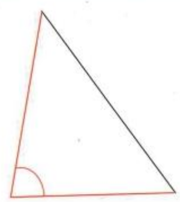
Resolución de triángulos oblicuángulos

Un triángulo es **oblicuángulo** cuando ninguno de sus ángulos interiores es recto, y resolverlo es hallar el valor de sus tres ángulos y sus tres lados. Para ello hay que aplicar el teorema del seno, del coseno y la propiedad de la suma de sus ángulos interiores, que es de 180°.

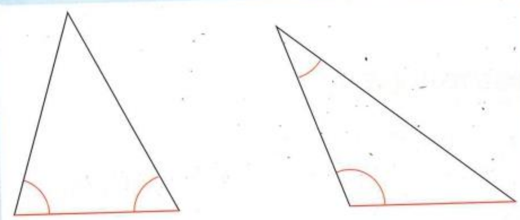
Siempre que sea posible se deben utilizar los datos y no los resultados obtenidos.

Se pueden presentar distintos casos:

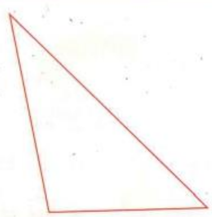
Dos lados y el ángulo comprendido



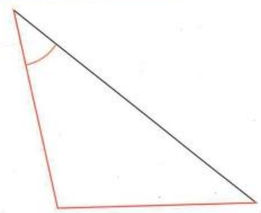
Un lado y dos ángulos



Los tres lados



Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos



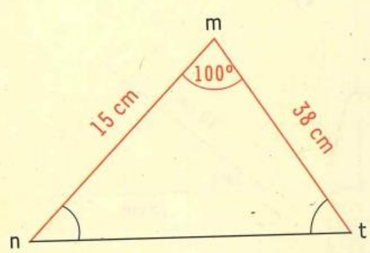
Resolver un triángulo oblicuángulo dados **dos lados** y el **ángulo comprendido**.

- Se aplica el teorema del coseno para calcular el lado $\overline{nt}$.

$\overline{nt}^2 = (15\ cm)^2 + (38\ cm)^2 - 2.15\ cm.38\ cm.\cos 100°$

$\overline{nt}^2 \cong 225\ cm^2 + 1.444\ cm^2 + 197,96\ cm^2$

$\mathbf{\overline{nt} \cong 43,21\ cm}$



- Se aplica el teorema del seno para averiguar los ángulos $\hat{n}$ y $\hat{t}$.

$$\frac{38\ cm}{\text{sen}\ \hat{n}} = \frac{43,21\ cm}{\text{sen}\ 100°} \Rightarrow \text{sen}\ \hat{n} \cong \frac{38\ cm.\text{sen}\ 100°}{43,21\ cm} \Rightarrow \mathbf{\hat{n} \cong 60°}$$

$$\frac{15\ cm}{\text{sen}\ \hat{t}} = \frac{43,21\ cm}{\text{sen}\ 100°} \Rightarrow \text{sen}\ \hat{t} \cong \frac{15\ cm.\text{sen}\ 100°}{43,21\ cm} \Rightarrow \mathbf{\hat{t} \cong 20°}$$

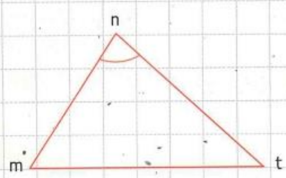
Para verificar los resultados obtenidos se puede utilizar la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

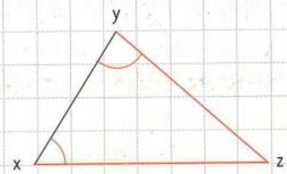
Resolución de triángulos oblicuángulos

PARADA PRÁCTICA 54

VERIFICACIÓN 54

- Relacionen los datos en rojo de cada una de las figuras aplicando el teorema del seno o del coseno.

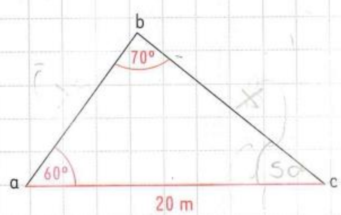
1) 

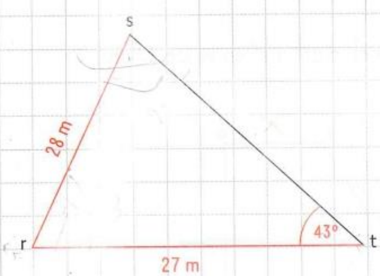
2) 

APLICACIÓN 54

Ejercicio 54.1

- Resuelvan los siguientes triángulos oblicuángulos.

1) 

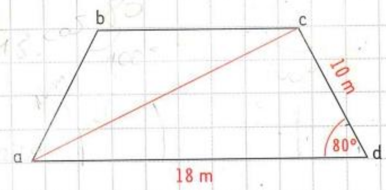
2) 

Resolución de triángulos oblicuángulos

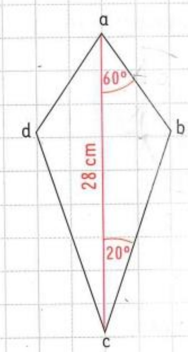
Ejercicio 54.2

- **Calculen.**

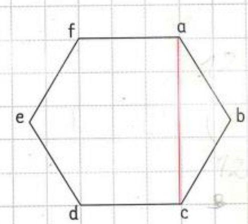
1) El valor de la diagonal $\overline{ac}$ del trapecio isósceles abcd.



2) El perímetro del romboide abcd.



3) El valor de la diagonal $\overline{ac}$ del hexágono regular abcdef, si el perímetro del mismo es de 72 cm.

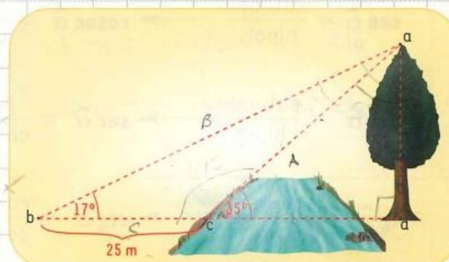


PARADA PRÁCTICA 54

Ejercicio 54.3

● **Planteen y resuelvan cada uno de los siguientes problemas.**

1) Un árbol está situado en la orilla de un río. El extremo superior del árbol, desde un cierto punto (ubicado en la otra margen del río), determina un ángulo de elevación de 17°.
Si a 25 m de dicho punto y en dirección al árbol, el ángulo es de 35°, ¿cuál es la altura del mismo?



2) Tres pueblos X, W y Z, están unidos por carreteras rectas. La distancia entre X y W es de 6 km; a los pueblos W y Z los separan 9 km. El ángulo que forman las carreteras que unen X con W y W con Z es de 120°.
¿Qué distancia hay entre X y Z?

3) En una plazoleta de forma triangular, los lados miden 60 m, 75 m y 50 m.
¿Qué ángulos se forman en las esquinas de la misma?